MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT
BERLIN

F. K. SCHMIDT
MÜNSTER

HERAUSGEGEBEN VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR G. HERGLOTZ
A. E. INGHAM H. KNESER O. PERRON
W. SÜSS H. WEYL

52. BAND 2. HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 25. JULI 1949)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1949

Math.
Z.

Preis DMark 19.60

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

erscheint zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden von etwa 50 Bogen vereinigt werden.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Es wird ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder an den Verlag übergeht, und zwar bis zum 31. Dezember desjenigen Kalenderjahres, das auf das Jahr des Erscheinens folgt. Hieraus ergibt sich, daß grundsätzlich nur Arbeiten angenommen werden können, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind, und die auch nachträglich nicht anderweitig zu veröffentlichen der Autor sich verpflichtet.

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sind stets besonders (etwa mit einem farbigen Stift) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

E. Kamke, Tübingen, Eßlinger Straße 16,

K. Knopp, Tübingen, Am Apfelberg 6,

R. Nevanlinna, Helsinki,

E. Schmidt, Berlin-Steglitz, Sedanstr. 8 (Mathematisches Institut),

F. K. Schmidt, Münster/W., Schlaunstr. 4.

52. Band. **Inhalt:** 2. Heft.

Seite

Kneschke, Prof. Dr. A., Bad Reiboldsgrün über Auerbaeh: Zur Theorie der Interpolation 137

Schwan, Dr. W., Osterwald über Elze, Kr. Hameln: Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden 150

Schmidt, Prof. Dr. H., Braunschweig, Math. Institut der Technischen Hochschule: Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen 168

Schwan, Dr. W., Osterwald über Elze, Kr. Hameln: Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände 193

Kühnel, Dr. U., Rinteln/Weser, Blumenwall 3: Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen 202

Hadwiger, Prof. Dr. H., Bern, Hochfeldstr. 31: Über konvexe Körper mit Flachstellen 212

Burger, Dr. E., Frankfurt/Main., Schumannstr. 58 (Math. Seminar): Über Schnittzahlen von Homotopieketten 217

Zur Theorie der Interpolation.

Von

A. Kneschke in Meerane.

Aus dem NEWTONschen Interpolationstheorem kann man nach einem von G. KOWALEWSKI angegebenen Verfahren [1]) ein Interpolationstheorem herleiten, das viele Einzelprobleme der Interpolationsrechnung und der numerischen Integration unter einheitlichem Gesichtspunkte erscheinen läßt.

Es sollen in § 1 insbesondere die Eigenschaften der in diesem allgemeinen Theorem auftretenden Entwickelungsfunktionen und der Restfunktion aufgezeigt werden. Darüber hinaus wird in § 2 erörtert, in welchem Umfange dieses erweiterte Interpolationstheorem als Hilfsmittel zur einheitlichen Entwickelung der klassischen Quadraturformeln verwendet werden kann. Es werden zwei sehr allgemeine Integrationstheoreme aufgestellt, die als Grundlage der genäherten Quadratur dienen können.

G. KOWALEWSKI schließt seine Betrachtungen an folgendes Ergebnis der Interpolationstheorie an: Ist $f(x)$ im Bereich (α, β) an den inneren Stellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ durch die Funktionswerte $f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n)$ vertreten, so stellt das *NEWTONsche Interpolationstheorem* [2])

$$f(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, L_\mu(x) + \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\, f^{(n)}(\xi)\, d\xi$$

(1)

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu(x)\,\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right.$$

die Funktion $f(x)$ in (α, β) dar, wenn unter

$$L_\mu(x) = \frac{L(x)}{(x-x_\mu)\,L'(x_\mu)}, \quad L(x) = (x-x_1)(x-x_2), \ldots, (x-x_n)$$

die LAGRANGEschen Polynome zu verstehen sind. Diese Entwickelungs-

[1]) G. KOWALEWSKI, Entwickelung einer Funktion nach LAGRANGEschen Polynomen und ihren Integralen. Dtsche. Math. Jahrg. 3, Heft 3, S. 275.

[2]) G. KOWALEWSKI, Interpolation und genäherte Quadratur. B. G. TEUBNER, Berlin 1932, S. 74. In beiden Arbeiten wird das Restglied der Interpolationsformel in Integralform gegeben, die ausnahmslos den vorliegenden Untersuchungen zugrunde liegt.

polynome genügen der Identität

$$(1.1)\qquad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{(x_\mu-\xi)^\lambda}{\lambda!} L_\mu^{(\varrho)}(x) = \frac{(x-\xi)^{\lambda-\varrho}}{(\lambda-\varrho)!}; \quad \lambda,\ \varrho = 0, \ldots, n-1.$$

Berücksichtigt man (1.1), so kann

$$\frac{\partial^\varrho K(x,\xi)}{\partial x^\varrho} = K^{(\varrho)}(x,\xi)$$
$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\};$$
$$\varrho = 1, \ldots, n-1$$

ausführlich in zweierlei Gestalt geschrieben werden; nämlich

$$K^{(\varrho)}(x,\xi) = \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)-1]; & \alpha \leqq \xi \leqq x_1 \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)-1] + \sum_{\mu=1}^{\lambda} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} & \\ \qquad\qquad x_\lambda \leqq \xi \leqq x_{\lambda+1},\ \lambda = 1, \ldots, n-1 & \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)+1] - \sum_{\mu=\lambda+1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} & \\ \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}[\operatorname{sgn}(x-\xi)+1]; & x_n \leqq \xi \leqq \beta. \end{cases}$$

Hiernach stellt man fest, daß $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-1$ Ableitungen nach ξ bei $\xi = \alpha$ und $\xi = \beta$ verschwindet, daß ferner an den Stellen $\xi = x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Kernfunktion und ihre ersten $n-2$ Ableitungen stetig sind, während dort die $(n-1)$-te Ableitung nach ξ die Sprünge

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial \xi^{n-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x_\mu-0}^{\xi=x_\mu+0} = (-1)^{n-1} L_\mu(x); \quad \mu = 1, \ldots, n$$

aufweist. An der Stelle $\xi = x$ ist $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-\varrho-2$ Ableitungen nach ξ stetig und hat dort in der $(n-\varrho-2)$-ten Ableitung den Sprung

$$\frac{\partial^{n-\varrho-1}}{\partial \xi^{n-\varrho-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{\xi=x-0}^{\xi=x+0} = (-1)^{n-\varrho}; \quad \varrho = 0, \ldots, n-1,$$

während die Sprünge höherer Ableitungen wieder verschwinden. In derselben Weise können wir für $x = \xi$ bestätigen, daß $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ mit den ersten $n-\varrho-2$ Ableitungen nach x stetig ist, während die $(n-\varrho-2)$-te Ableitung den Sprung

$$\frac{\partial^{n-\varrho-1}}{\partial x^{n-\varrho-1}} K^{(\varrho)}(x,\xi)\Big|_{x=\xi-0}^{x=\xi+0} = 1; \qquad \varrho = 0, \ldots, n-1$$

zeigt. Dabei ist $x \neq x_\mu$ vorauszusetzen.

Integriert man (1) von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ und setzt $\int_\alpha^\beta L_\mu(x)\,dx = L_\mu$, so stellt

$$(2) \qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu f(x_\mu) + \int_\alpha^\beta \Re(\xi)\, f^{(n)}(\xi)\,d\xi$$

$$\Re(\xi) = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\,d(x)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^n + (\beta-\xi)^n}{n!} - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu \frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

die *Newtonsche Quadraturformel* dar.

§ 1.

Das Interpolationsverfahren und die Entwickelungsfunktionen.

Differenzieren wir (1), so wird

$$f^{(\varrho)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, L_\mu^{(\varrho)}(x) + \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(n)}(\xi)\,d\xi; \quad \varrho = 0, \ldots, n-1.$$

Nach dieser Entwickelungsvorschrift schreiben wir entsprechende Relationen für $f^{(\varrho)}(x)$, $f^{(n)}(x)$, $f^{(2n-\varrho)}(x)$, ..., $f^{[(\nu-1)(n-\varrho)+\varrho]}(x)$ auf, ersetzen für $n-\varrho = \varepsilon$ die Ableitungen von f in der Restfunktion schrittweise jeweils durch die folgende Gleichung unter gleichzeitiger Vertauschung der Integrationen in den Doppelintegralen und gelangen so zu dem *Kowalewskischen Interpolationstheorem*

$$(3) \qquad f^{(\varrho)}(x) = S(x) + \int_\alpha^\beta K_{\nu-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(\nu\varepsilon+\varrho)}(\xi)\,d\xi$$

mit der Interpolationsfunktion

$$S(x) = \sum_{\mu=1}^{n} f(x_\mu)\, I_{\mu 0}(x) + \sum_{\mu=1}^{n} f^{(\varepsilon)}(x_\mu)\, I_{\mu 1}(x) + \cdots + \sum_{\mu=1}^{n} f^{[(\nu-1)\varepsilon]}(x_\mu)\, I_{\mu,\nu-1}(x).$$

Dabei haben wir mittels der Kerniterationen

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\eta)\, K^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\eta)\, K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta,\xi)\,d\eta$$

die Entwickelungsfunktionen in der Form

$$I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x), \quad I_{\mu 1}(x) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi,$$

$$I_{\mu 2}(x) = \int_\alpha^\beta K_1^{(\varrho)}(x,\xi)\, L_\mu^{(\varrho)}(\xi)\,d\xi \ldots$$

erhalten. In der Entwickelung (3) erkennen wir ein sehr allgemeines

Interpolationstheorem. Wir sind bei seiner Herleitung von der Newtonschen Grundformel ausgegangen und haben schrittweise das neue, wesentlich allgemeinere Theorem gewonnen. In diesem schrittweisen Vorgehen liegt die Eigenart des Kowalewskischen Interpolationsverfahrens.

Die *Entwickelungspolynome* $I_{\mu\sigma}(x)$ sind also schrittweise aus $I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x)$ durch Vermittelung des Kernes $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ und seiner Iterationen zu gewinnen. Man bestätigt ihre Integraldarstellung

$$I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, I_{\mu 0}(\xi)\, d\xi = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, I_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi; \quad \sigma = 1, 2, \ldots.$$

Jedes Entwickelungspolynom läßt sich demnach als Kernintegral seines vorangehenden Polynomes auffassen. Weiterhin ist es auch möglich, die zu dieser Integralbeziehung äquivalente Differentialrelation zu finden. Unter Beachtung der Stetigkeitseigenschaften von $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ bei $\xi = x$ folgt, weil $K^{(\varrho)}(x,\xi)$ in x vom $(n-\varrho-1)$-ten Grade ist,

$$I_{\mu\sigma}^{(n-\varrho)}(x) = I_{\mu,\sigma-1}(x); \qquad \sigma = 1, 2, \ldots.$$

Führen wir

$$S^\varrho I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\, I_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi$$

als ϱ-te Stammfunktion von $I_{\mu\sigma}(x)$ ein, so muß diese an den Stellen $x = x_1, x_2, \ldots, x_n$ verschwinden, weil $K(x,\xi)$ dort Nullstellen hat. Wir sehen also, daß die Integraldarstellung

$$(3.1) \qquad I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\xi)\, I_{\mu,\sigma-1}(\xi)\, d\xi, \quad I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x); \quad \begin{matrix}\sigma = 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, \ldots, n\end{matrix}$$

dem Lagrangeschen Integrationsproblem

$$(3.2) \quad I_{\mu\sigma}^{(n-\varrho)}(x) = I_{\mu,\sigma-1}(x), \quad I_{\mu 0}(x) = L_\mu^{(\varrho)}(x), \quad S^\varrho I_{\mu\sigma}(x_\nu) = 0; \quad \begin{matrix}\varrho = 1, 2, \ldots \\ \mu, \nu = 1, \ldots, n\end{matrix}$$

äquivalent ist.

Es bleibt noch übrig, den Kern $K_i^{(\varrho)}(x,\xi)$ in der *Restfunktion*

$$R(x) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi)\, f^{(i\varepsilon+\varrho)}(\xi)\, d\xi$$

als Iteration zu

$$K^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{n-\varrho-1}}{(n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n} L_\mu^{(\varrho)}(x)\, \frac{(x_\mu-\xi)^{n-1}}{(n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

zu berechnen. Man wird vermuten, daß $K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi)$ in der Form

$$(3.3) \qquad K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(x-\xi)^{i\varepsilon-1}}{(i\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu}(x)\, \frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

darstellbar ist. Wir bilden hieraus

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \int_\alpha^\beta K^{(\varrho)}(x,\eta)\, K_{i-1}^{(\varrho)}(\eta,\xi)\, d\eta$$

und erhalten unter Berücksichtigung von (1) und (3.1)

$$K_i^{(\varrho)}(x,\xi) = \frac{1}{2}\Big\{\frac{(x-\xi)^{i\varepsilon+n-\varrho-1}}{(i\varepsilon+n-\varrho-1)!}\operatorname{sgn}(x-\xi) - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i} I_{\mu\nu}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+n-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+n-\nu\varepsilon-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\Big\}.$$

Die Kerniterationen sind also ohne weitere Integrationen aus den Entwickelungsfunktionen zu gewinnen. Bilden wir (3) für

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-1}}{(i\varepsilon+\varrho-1)!},$$

so entsteht die Identität

$$\sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu}(x)\frac{(x_\mu-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!} = \frac{(x-\xi)^{i\varepsilon-1}}{(i\varepsilon-1)!}. \tag{3.4}$$

Ist insbesondere $n=2$ und $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$, so wird, wenn man (3.4) berücksichtigt,

$$K_{i-1}^{(\varrho)}(x,\xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{i-1} I_{1\nu}(x)\frac{(\alpha-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} I_{2\nu}(x)\frac{(\beta-\xi)^{i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1}}{(i\varepsilon+\varrho-\nu\varepsilon-1)!}; & x \leqq \xi. \end{cases}$$

Für den Sonderfall $\varrho=0$, $n=2$ entsteht für $x_1=\alpha$, $x_2=\beta$ der Kern

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\Big\{(x-\xi)\operatorname{sgn}(x-\xi) - \frac{(\beta-x)(\xi-\alpha)+(x-\alpha)(\beta-\xi)}{\beta-\alpha}\Big\}.$$

Er liefert nach (3.2) die geraden Eulerschen und ungeraden Bernoullischen Polynome als Entwickelungsfunktionen

$$I_{1,\nu}(x) = \frac{E_{2\nu}(x)}{2} - \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta-\alpha},\quad I_{2,\nu}(x) = \frac{E_{2\nu}(x)}{2} + \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta-\alpha};\quad \nu = 0,\ldots,i-1,$$

so daß bei Verwendung der Symbole

$$\bigtriangledown f = \frac{f(\alpha)+f(\beta)}{2},\quad \bigtriangleup f = \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$f(x)$ entsprechend den gegebenen Spektralwerten

$$\begin{array}{cc} f(\alpha), & f(\beta) \\ f''(\alpha), & f''(\beta) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f^{(2i-2)}(\alpha), & f^{(2i-2)}(\beta) \end{array}$$

in der Form

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\nabla f^{(2\nu)} \cdot E_{2\nu}(x) + \triangle f^{(2\nu)} \cdot B_{2\nu+1}(x) \right) + \int_{\alpha}^{\beta} K_{i-1}(x, \xi)\, f^{(2i)}(\xi)\, d\xi \tag{4.1}$$

mit der aus (3.3) zu berechnenden Kernfunktion

$$K_{i-1}(x, \xi) = \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\frac{E_{2\nu}(x)}{2} - \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta - \alpha} \right) \frac{(\alpha - \xi)^{2i-2\nu-1}}{(2i-2\nu-1)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} \left(\frac{E_{2\nu}(x)}{2} + \frac{B_{2\nu+1}(x)}{\beta - \alpha} \right) \frac{(\beta - \xi)^{2i-2\nu-1}}{(2i-2\nu-1)!}; & x \leqq \xi \end{cases} \tag{4.2}$$

darstellbar ist. Das ist das *Euler-Bernoullische Interpolationstheorem.*

Für den Sonderfall $\varrho = n-1$, $n = 2$ wird für $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$ der Kern

$$K'(x, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) + \frac{\xi - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\beta - \alpha}.$$

Es ergeben sich nach (3.2) die Bernoullischen Polynome

$$I_{1,\nu}(x) = -\frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha}, \quad I_{2,\nu}(x) = \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha}; \quad \nu = 0, \ldots, i-1$$

als Entwickelungsfunktionen, so daß $f(x)$ entsprechend den gegebenen Spektralwerten

$$\begin{array}{ll} f(\alpha), & f(\beta) \\ f'(\alpha), & f'(\beta) \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ f^{(i-1)}(\alpha), & f^{(i-1)}(\beta) \end{array}$$

in der Form

$$f'(x) = \sum_{\nu=0}^{i-1} \triangle f^{(\nu)} \cdot B_\nu(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K'_{i-1}(x, \xi)\, f^{(i+1)}(\xi)\, d\xi \tag{5.1}$$

mit der aus (3.3) errechneten Kernfunktion

$$K'_{i-1}(x, \xi) = \begin{cases} -\sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{(\alpha - \xi)^{i-\nu}}{(i-\nu)!}; & x \geqq \xi \\ -\sum_{\nu=0}^{i-1} \frac{B_\nu(x)}{\beta - \alpha} \cdot \frac{(\beta - \xi)^{i-\nu}}{(i-\nu)!}; & x \leqq \xi \end{cases} \tag{5.2}$$

entwickelt werden kann. Das ist das *Euler-Maclaurinsche Interpolationstheorem.*

Der Vollständigkeit halber wird bemerkt, daß für $\varrho = 0$, $n = 1$ aus (3) die *Taylorsche Interpolationsformel* mit dem bekannten Bernoullischen Integralrestglied folgt.

Bereits diese einfachen Sonderfälle zeigen, daß dem Interpolationstheorem von Kowalewski als Verallgemeinerung des Newtonschen Theoremes insofern eine große Leistungsfähigkeit zukommt, als Interpolationsgesetze, die bisher voneinander unabhängig hergeleitet werden mußten, durch dieses allgemeine Theorem einheitlich umfaßt werden. Hierin liegt seine große Bedeutung für die Aufstellung einer in sich geschlossenen Interpolationstheorie.

§ 2.

Die Quadraturformeln.

a) Wenn wir (3) für $\varrho = 0$ von $x = \alpha$ bis $x = \beta$ integrieren, so treten die Werte

$$I_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta I_{\mu\sigma}(x)\,dx, \quad I_{\mu 0} = \int_\alpha^\beta L_\mu(x)\,dx = L_\mu, \qquad \begin{matrix}\sigma = 1, 2, \ldots \\ \mu = 1, \ldots, n\end{matrix}$$

auf, die wir *I-Faktoren* nennen wollen. Führen wir durch die Relation

$$(6.1)\quad \mathfrak{K}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x,\xi)\,dx = \int_\alpha^\beta K(x,\xi)\,\mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,dx, \quad \mathfrak{K}_0 = 1$$

mittels (3.3) eine Folge von $\mathfrak{K}$-*Funktionen*

$$(6.2)\quad \mathfrak{K}_i(\xi) = \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^{in} + (\beta-\xi)^{in}}{(in)!} - \sum_{\mu=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu}\cdot\frac{(x_\mu-\xi)^{in-\nu n-1}}{(in-\nu n-1)!}\operatorname{sgn}(x_\mu-\xi)\right\}$$

ein, so kann man, da

$$I_{\mu\sigma}(x) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x,\xi)\,L_\mu(\xi)\,d\xi,$$

die I-Faktoren entsprechend

$$(6.3)\qquad I_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_\sigma(\xi)\,L_\mu(\xi)\,d\xi, \qquad \sigma = 0, 1, 2, \ldots$$

festlegen. — Die Integration der Restfunktion

$$R(x) = \int_\alpha^\beta K_{i-1}(x,\xi)\,f^{(in)}(\xi)\,d\xi$$

liefert den Rest

$$R = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_i(\xi)\,f^{(in)}(\xi)\,d\xi,$$

so daß sich als Quadraturformel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_i(\xi)\, f^{(in)}(\xi)\,d\xi \tag{7.1}$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \left\{ I_{\mu 0} \cdot f(x_\mu) + I_{\mu 1} \cdot f^{(n)}(x_\mu) + \cdots + I_{\mu, i-1} \cdot f^{[(i-1)n]}(x_\mu) \right\}$$

ergibt. Wir nennen (7. 1) *Erste* Kowalewskische *Quadraturformel.* Sie enthält die Newtonsche Quadraturformel (2) als Sonderfall $i = 1$.

Außer (6. 3) können wir noch weitere Eigenschaften der $\mathfrak{K}$-Funktionen angeben, die uns ihre Beziehungen zu den Entwickelungskoeffizienten erkennen lassen. Berücksichtigt man die Stetigkeitseigenschaften von $K(x, \xi)$, so folgt aus (6. 1) durch Differentiation nach ξ

$$\mathfrak{K}_\sigma^{(n)}(\xi) = (-1)^n\, \mathfrak{K}_{\sigma-1}(\xi); \qquad \begin{matrix} \sigma = 1, 2, \ldots, \\ n = 1, 2, \ldots. \end{matrix} \tag{6.4}$$

Es bleibt nur noch übrig, die zur vollständigen Festlegung der Lösungen des Differentialsystems ausreichenden Nebenbedingungen der $\mathfrak{K}$-Funktionen zu finden. Wegen der Stetigkeit von $K(x, \xi)$ und der ersten $n-2$ Ableitungen nach ξ bei $\xi = x$ gilt

$$\mathfrak{K}_\sigma^{(\nu)}(\xi) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} K(x, \xi)\, \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,dx, \qquad \begin{matrix} \nu = 1, 2, \ldots \\ \nu = 0, \ldots, n-1. \end{matrix}$$

Die $\mathfrak{K}$-Funktionen und ihre ersten $n-1$ Ableitungen verschwinden für α und β, sind mit ihren ersten $n-2$ Ableitungen bei $x_1, \ldots, x_n$ stetig und zeigen dort in der $(n-1)$-ten Ableitung die Sprünge

$$\mathfrak{K}_\sigma^{(n-1)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-1} \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\, L_\mu(x)\,dx = (-1)^{n-1} I_{\mu, \sigma-1}. \tag{6.5}$$

Die Entwickelungsfaktoren $I_{\mu\sigma}$ sind demnach durch die Sprungwerte der $(n-1)$-ten Ableitung der $\mathfrak{K}$-Funktionen $\mathfrak{K}_{\sigma+1}(\xi)$ an den Interpolationsstellen gegeben. — Fernerhin gewinnen wir durch Integration von (3. 4) nach x für die Entwickelungsfaktoren die Identität

$$\sum_{\mu=1}^{n} \sum_{\nu=0}^{i-1} I_{\mu\nu} \frac{(x_\mu - \xi)^{in-\nu n-1}}{(in - \nu n - 1)!} = \frac{(\beta - \xi)^{in} - (\alpha - \xi)^{in}}{(in)!}. \tag{6.6}$$

An einigen *Sonderfällen* soll die Anwendungsmöglichkeit der Quadraturformel (7. 1) dargelegt werden.

Setzen wir vorerst $n = 1$ und $x_1 = \alpha$ bzw. $x_1 = \beta$, so liefert $K(x, \xi) = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn}(x - \xi) + 1\}$ bzw. $K(x, \xi) = \frac{1}{2}\{\operatorname{sgn}(x - \xi) - 1\}$ nach (6. 1) die $\mathfrak{K}$-Funktionen

$$\mathfrak{K}_1 = \frac{\beta - \xi}{1!},\ \mathfrak{K}_2 = \frac{(\beta - \xi)^2}{2!} \cdots \text{ bzw. } \mathfrak{K}_1 = -\frac{\xi - \alpha}{1!},\ \mathfrak{K}_2 = \frac{(\xi - \alpha)^2}{2!} \cdots$$

mit den Sprüngen

$$\frac{\beta-\alpha}{1!}, \frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}, \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!} \cdots \text{ bzw. } \frac{\beta-\alpha}{1!}, -\frac{(\beta-\alpha)^2}{2!}, \frac{(\beta-\alpha)^3}{3!} \cdots,$$

so daß wir die *Taylorsche Quadraturformel*

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i-1} f^{(\nu)}(\alpha)\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \int_a^\beta \frac{(\beta-\xi)^i}{i!} f^{(i)}(\xi)\,d\xi \tag{8.1}$$

$$\text{bzw. } \int_a^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i-1}(-1)^\nu f^{(\nu)}(\beta)\frac{(\beta-\alpha)^{\nu+1}}{(\nu+1)!} + \int_a^\beta \frac{(\alpha-\xi)^i}{i!} f^{(i)}(\xi)\,d\xi$$

erhalten. — Für $x_1 = \frac{\alpha+\beta}{2}$ wird

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{\operatorname{sgn}(x-\xi) - \operatorname{sgn}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\xi\right)\right\}$$

und

$$\mathfrak{R}_1 = \frac{\beta-\xi}{1!}, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{(\beta-\xi)^2}{2!}\cdots, \text{ für } \xi > \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\mathfrak{R}_1 = -\frac{\xi-\alpha}{1!}, \quad \mathfrak{R}_2 = \frac{(\xi-\alpha)^2}{2!}\cdots, \text{ für } \xi < \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Aus den Sprüngen

$$\frac{2}{1!}\frac{\beta-\alpha}{2}, 0, \frac{2}{3!}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3, 0, \frac{2}{5!}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^5, 0\ldots$$

folgt die *Maclaurinsche Quadraturformel*[3])

$$\int_a^\beta f(x)\,dx = 2\sum_{\nu=0}^{i} f^{(2\nu)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \tag{8.2}$$

$$+ \int_0^{\frac{\beta-\alpha}{2}} \left[f^{(2i+1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}+\xi\right) - f^{(2i+1)}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\xi\right)\right]\frac{\left(\frac{\beta-\alpha}{2}-\xi\right)^{2i+1}}{(2i+1)}\,d\xi.$$

Setzt man $n = 2$, $x_1 = \alpha$, $x_2 = \beta$, mithin

$$L_1(x) = \frac{\beta-x}{\beta-\alpha}, \quad L_2(x) = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, \quad L_1 = L_2 = \frac{\beta-\alpha}{2},$$

so werden für

$$K(x,\xi) = \frac{1}{2}\left\{(x-\xi)\operatorname{sgn}(x-\xi) - \frac{(\beta-x)(\xi-\alpha)+(x-\alpha)(\beta-\xi)}{\beta-\alpha}\right\}$$

---

[3]) Das Restglied ergibt sich in dieser Form, wenn man im ersten Integralanteil $\alpha \leqq \xi \leqq \frac{\alpha+\beta}{2}$ die Veränderliche ξ durch $\frac{\alpha+\beta}{2} - \xi$, im zweiten $\frac{\alpha+\beta}{2} \leqq \xi \leqq \beta$ sie aber durch $\frac{\alpha+\beta}{2} + \xi$ ersetzt.

die $\mathfrak{K}$-Funktionen die Randwertaufgabe

$$\mathfrak{K}_\sigma''(\xi) = \mathfrak{K}_{\sigma-1}(\xi);\ \mathfrak{K}_0 = 1$$
$$\mathfrak{K}_\sigma(\alpha) = \mathfrak{K}_\sigma(\beta) = 0$$

erfüllen müssen. Das liefert aber die geraden Eulerschen Polynome

$$\mathfrak{K}_0(\xi) = E_0(\xi),\ \mathfrak{K}_1(\xi) = E_2(\xi) \ldots.$$

Aus den Sprungwerten

$$\mathfrak{K}_\sigma'(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,\frac{x-\beta}{\beta-\alpha}\,dx = -I_{1,\sigma-1}$$

und

$$\mathfrak{K}_\sigma'(\beta) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{K}_{\sigma-1}(x)\,\frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}\,dx = I_{2,\sigma-1}$$

folgen die I-Faktoren

$$I_{1,\nu} = I_{2,\nu} = -E_{2\nu+1}(\alpha) = E_{2\nu+1}(\beta); \qquad \nu = 0, 1, \ldots,$$

so daß wir mittels der Eulerschen Zahlen $e_1, e_3 \ldots$ gemäß

$$E_1(\beta) = \frac{\beta-\alpha}{2}\,e_1,\ E_3(\beta) = \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3 e_3 \ldots$$

die *Boolesche Quadraturformel*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \sum_{\nu=0}^{i} e_{2\nu+1}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^{2\nu+1}\left(f^{(2\nu)}(\alpha) + f^{(2\nu)}(\beta)\right) - \int_\alpha^\beta E_{2i+1}(\xi)\,f^{(2i+1)}(\xi)\,d\xi \tag{8.3}$$

erhalten.

b) Aus dem Theorem (3) für $\varrho = 0$ kann man noch eine andere Quadraturformel herleiten. Wir bilden die erste Ableitung von $f(x)$ an allen Interpolationsstellen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, multiplizieren jeweils mit den Newtonschen Faktoren $L_1, L_2, \ldots, L_n$ und summieren; also

$$\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho f'(x_\varrho) = \sum_{\mu=1}^{n}\Bigg\{f(x_\mu)\cdot\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho L_\mu'(x_\varrho)$$
$$+ f^{(n)}(x_\mu)\cdot\int_\alpha^\beta L_\mu(\xi)\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho K'(x_\varrho,\xi)\,d\xi + \cdots$$
$$+ f^{[(i-1)n]}(x_\mu)\cdot\int_\alpha^\beta L_\mu(\xi)\sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho K_{i-2}'(x_\varrho,\xi)\,d\xi\Bigg\}$$
$$+ \int_\alpha^\beta f^{(in)}(\xi)\sum_{\varrho=1}^{u} L_\varrho K_{i-1}'(x_\varrho,\xi)\,d\xi.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite läßt sich wesentlich vereinfachen; es ist nämlich für $x_1 = \alpha$ und $x_n = \beta$

$$L'_\mu(x) = \sum_{\varrho=1}^{n} L'_\mu(x_\varrho)\, L_\varrho(x)$$

$$\int_\alpha^\beta L'_\mu(x)\, dx = \sum_{\varrho=1}^{n} L_\varrho\, L'_\mu(x_\varrho) = \begin{cases} -1; & \mu = 1 \\ +1; & \mu = n \\ 0; & \mu \neq 1, n. \end{cases}$$

Dieser Summand wird dann gleich $f(\beta) - f(\alpha)$. Ersetzen wir in der ganzen Gleichung $f(x)$ durch $S^1 f(x)$ und $f^{(i)}(x)$ durch $f^{(i-1)}(x)$, so entsteht hieraus schließlich die Quadraturformel

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = S + \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{i-1}(\xi)\, f^{(in-1)}(\xi)\, d\xi \tag{7. 2}$$

mit der Interpolationssumme

$$S = \sum_{\mu=1}^{n} \{H_{\mu 0} \cdot f(x_\mu) + H_{\mu 1} \cdot f^{(n-1)}(x_\mu) + \cdots + H_{\mu, i-1} \cdot f^{[(i-1)n-1]}(x_\mu)\},$$

wobei die Entwickelungskoeffizienten $H_{\mu\sigma}$ durch die Folge der $\mathfrak{G}$-*Funktionen*

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_0(\xi) &= -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'(x_\mu, \xi) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{(\alpha-\xi)^{n-1} + (\beta-\xi)^{n-1}}{(n-1)!} - \sum_\mu L_\mu \frac{(x_\mu - \xi)^{n-2}}{(n-2)!} \operatorname{sgn}(x_\mu - \xi)\right\} \end{aligned} \tag{9. 1}$$

$$\mathfrak{G}_i(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'_i(x_\mu, \xi) = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{G}_{i-1}(x)\, dx$$

aus der Relation

$$H_{\mu\sigma} = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi)\, L_\mu(\xi)\, dx, \quad H_{\mu 0} = L_\mu; \quad \sigma = 1, 2, \ldots \tag{9. 2}$$

bestimmt werden können. Die die *H-Faktoren* vermittelnden $\mathfrak{G}$-Funktionen sind also aus der Integralbeziehung

$$\mathfrak{G}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K_{\sigma-1}(x, \xi)\, \mathfrak{G}_0(x)\, dx, \quad \mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_{\mu=1}^{n} L_\mu K'(x_\mu, \xi) \tag{9. 3}$$

oder schrittweise aus

$$\mathfrak{G}_\sigma(\xi) = \int_\alpha^\beta K(x, \xi)\, \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x)\, dx), \qquad \sigma = 1, 2, \ldots$$

zu gewinnen. Diesen Beziehungen liegt wieder die Funktion $K(x, \xi)$ zugrunde. Nur ist zu beachten, daß die Bildung der $\mathfrak{G}$-Funktionen von

$$\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_\mu L_\mu K'(x_\mu, \xi)$$

ausgeht, während die $\mathfrak{R}$-Funktionen von $\mathfrak{R}_0 = 1$ aus entwickelt werden. Wir nennen (7. 2) *Zweite Kowalewskische Quadraturformel.* Der Integralwert wird bei ihr durch eine lineare Kombination der Spektralwerte $f(x_\mu)$, $f^{(n-1)}(x_\mu)$, $f^{(2n-1)}(x_\mu)$ ... für $\mu = 1, \ldots, n$ und $n = 2, 3, \ldots$ dargestellt, während bei der Ersten Quadraturformel (7. 1) die Interpolationssumme die Spektralwerte $f(x_\mu)$, $f^{(n)}(x_\mu)$, $f^{(2n)}(x_\mu)$ . . . für $\mu = 1, \ldots, n$ und $n = 1, 2 \ldots$ und dadurch den Integralwert vertritt. Das ist der grundsätzliche Unterschied beider Quadraturformeln.

Wir wollen noch weitere Eigenschaften der $\mathfrak{G}$-Funktionen aufzeigen, um ihren Zusammenhang mit den H-Faktoren klar hervortreten zu lassen. Aus den Stetigkeitseigenschaften von $K(x, \xi)$ leiten wir mittels (9. 3) die Differentialbeziehung

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(n)}(\xi) = (-1)^n \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi); \qquad \begin{matrix} \sigma = 1, 2, \ldots \\ n = 2, 3, \ldots \end{matrix} \tag{9. 4}$$

ab. Für $\mathfrak{G}_0(\xi) = -\sum_\mu L_\mu K'(x_\mu, \xi)$ stellen wir die Stetigkeit einschließlich ihrer ersten $n-3$ Ableitungen fest, während ihre $(n-2)$-te Ableitung an den Stellen $\xi = x_\mu$ die Sprünge

$$\mathfrak{G}_0^{(n-2)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-2} L_\mu$$

hat. Ferner gilt

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(\nu)}(\xi) = \int_\alpha^\beta \frac{\partial^\nu K(x, \xi)}{\partial \xi^\nu} \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x)\, dx; \qquad \begin{matrix} \sigma = 1, 2 \ldots \\ \nu = 0 \ldots n-1 \end{matrix}$$

Aus den Stetigkeitseigenschaften von $K(x, \xi)$ und ihren Ableitungen nach ξ folgt daher, daß $\mathfrak{G}_\sigma(\xi)$ mit ihren ersten $n-2$ Ableitungen nach ξ stetig ist, bei α und β verschwindet und an den Stellen $x_1 \ldots x_n$ in der $(n-1)$-ten Ableitung die Sprünge

$$\mathfrak{G}_\sigma^{(n-1)}(\xi)\Big|_{\xi = x_\mu - 0}^{\xi = x_\mu + 0} = (-1)^{n-1} \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x) L_\mu(x)\, dx = (-1)^{n-1} H_{\mu\sigma} \tag{9. 5}$$

$$\begin{matrix} \sigma = 1, 2 \ldots \\ \mu = 1, \ldots, n \end{matrix}$$

aufweist. Durch (9. 4) und die angegebenen Stetigkeitseigenschaften sind die $\mathfrak{G}$-Funktionen eindeutig bestimmt. — Bildet man (7. 2) für

$$f(x) = \frac{(x-\xi)^{in-2}}{(in-2)!},$$

so wird

$$\sum_{\mu=1}^{n} \left\{ \frac{(x_\mu - \xi)^{in-2}}{(in-2)!} H_{\mu 0} + \sum_{\nu=1}^{i-1} H_{\mu\nu} \frac{(x_\mu - \xi)^{in-\nu n-1}}{(in-\nu n-1)!} \right\} \tag{9. 6}$$

$$= \frac{(\beta-\xi)^{in-1} - (\alpha-\xi)^{in-1}}{(in-1)!}$$

Wir wollen auch hierfür einen *Sonderfall* behandeln. Für $n = 2$ und

$$K'(x, \xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x - \xi) + \frac{B_1(\xi)}{\beta - \alpha}$$

wird $\mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi)$ die Ausgangsfunktion für die $\mathfrak{G}$-Funktionen, denen die Randwertaufgabe

$$\mathfrak{G}_\sigma''(\xi) = \mathfrak{G}_{\sigma-1}(\xi), \quad \mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi)$$
$$\mathfrak{G}_\sigma(\alpha) = \mathfrak{G}_\sigma(\beta) = 0$$

mit den Lösungen

$$\mathfrak{G}_0(\xi) = -B_1(\xi), \quad \mathfrak{G}_1(\xi) = -B_3(\xi) \ldots$$

zugrundeliegt. Aus den Sprungwerten

$$\mathfrak{G}_\sigma'(\alpha) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x) \frac{x - \beta}{\beta - \alpha} dx = -H_{1,\sigma}$$

und

$$\mathfrak{G}_\sigma'(\beta) = \int_\alpha^\beta \mathfrak{G}_{\sigma-1}(x) \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha} dx = H_{2,\sigma}$$

folgen die H-Faktoren

$$H_{1,\nu} = -H_{2,\nu} = B_{2\nu}(\alpha) = B_{2\nu}(\beta); \qquad \nu = 1, 2, \ldots$$
$$H_{10} = H_{20} = B_1 = \frac{\beta - \alpha}{2},$$

so daß wir mittels der Bernoullischen Zahlen $b_0, b_2, \ldots$ gemäß

$$B_2(\beta) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^2 b_2, \quad B_4(\beta) = \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^4 b_4, \ldots$$

die *Euler-Maclaurinsche Quadraturformel*

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta))$$
$$+ \sum_{\nu=1}^{i} b_{2\nu} \left(\frac{\beta - \alpha}{2}\right)^{2\nu} (f^{(2\nu-1)}(\alpha) - f^{(2\nu-1)}(\beta)) - \int_\alpha^\beta B_{2i+1}(\xi) f^{(2i+1)}(\xi)\, d\xi \tag{8.4}$$

erhalten.

(Eingegangen am 15. August 1946.)

Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden*).

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

Es handelt sich um die verallgemeinernde Übertragung eines für die modularen Verbände charakteristischen Satzes auf allgemeine Verbände: Sind X und Y Mengen von Elementen eines Verbandes V, dann sollen $X \vee Y$ und $X \wedge Y$ die Mengen der Elemente $x \cup y$ bzw. $x \cap y$ mit $x \in X$ und $y \in Y$ bezeichnen. Für die modularen Verbände ist charakteristisch, daß für irgend zwei ihrer Elemente

$$(1) \qquad \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}$$

besteht. In Worten: Die progressiv nach a und b zerlegbaren Elemente sind, soweit sie $a \cap b$ übertreffen, auch regressiv nach a und b zerlegbar, die regressiv nach a und b zerlegbaren, soweit sie $a \cup b$ untertreffen, auch progressiv. Woraus denn u. a. folgt, daß sie einen Teilverband bilden. — Die Übertragung dieses Satzes auf allgemeine Verbände ersetzt die Teilverbandgleichung (1) durch die Teilbundisomorphie

$$(2) \qquad \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \sim \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

genauer, durch die Austauschisomorphie

$$(3) \qquad x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x)$$

zwischen diesen Teilbünden. Sie ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y derjenigen Zwischenreiche y/x, die ein progressiv nach a und b zerlegbares Element x mit einem regressiv nach a und b zerlegbaren Element y verbinden, ohne ein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element zu enthalten. Diese Zwischenreiche werden durch die Kleinstwerte der Umreichfunktion

$$(4) \qquad U(z) = \frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)}$$

*) Anmerkung der Redaktion. Die vorstehende Arbeit wurde erstmalig am 7. April 1944 eingereicht, vom Verfasser aber aus redaktionellen Gründen im Dezember 1945 zurückgezogen. Die jetzige Fassung stimmt von wenigen, durch die inzwischen erschienene Arbeit [A 2] bedingten Änderungen abgesehen im wesentlichen mit der früheren überein.

dargestellt. Die Austauschisomorphie — sie mag die kleine Überperspektivität heißen — steht zu den beiden Schwesterperspektivitäten

$$x_1 = a \cap y_1, \quad y_1 = b \cup x_1 \tag{5a}$$

$$x_2 = b \cap y_2, \quad y_2 = a \cup x_2 \tag{5b}$$

in folgender Beziehung: Jedes Zwischenreich der einen Perspektivität hat mit jedem Zwischenreich der anderen Elemente gemein. Die Durchschnitte der Zwischenreiche sind selbst Zwischenreiche. Es sind die Zwischenreiche der Überperspektivität.

2. Zerlegbafkeit nach a und b.

2. 1. Adjungieren wir dem Verbande V nötigenfalls ein unterstes und oberstes Element 1 bzw. 0, dann sind

$$V^{\smile} = \frac{a}{1} \vee \frac{b}{1} \tag{6a}$$

und

$$V^{\frown} = \frac{0}{a} \wedge \frac{0}{b} \tag{6b}$$

die Mengen der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente. Erklären wir

$$z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z) \tag{7a}$$

$$z^{\frown} = (a \cup z) \cap (b \cup z) \tag{7b}$$

dann gilt für beliebige Elemente

$$z^{\smile} = z = z^{\frown} \tag{8}$$

und es sind nach [A 1, 4. 3.][1]) $z = z^{\smile}$ bzw. $z = z^{\frown}$ die Gleichungen von $V^{\smile}$ bzw. $V^{\frown}$. Hiernach bestehen $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ aus den Deckelementen der Transformationen (7) von V. Die Deckelemente einer Transformation gehören zu ihren Bildelementen und die Formeln (7) zeigen, daß jedes Bildelement der einen oder anderen Transformation $V^{\smile}$ bzw. $V^{\frown}$ angehört. Demnach läßt sich ebenso gut sagen, daß V bzw. $V^{\frown}$ aus den Elementen $z^{\smile}$ bzw. $z^{\frown}$ bestehen, also die von den Transformationen (7) entworfenen Bilder des Verbandes V sind.

2. 2. Über die Transformationen (7) erfahren wir so nebenbei, daß sie idempotent sind:

$$z^{\smile\smile} = z^{\smile}, \quad z^{\frown\frown} = z^{\frown} \tag{9}$$

Und da zugleich (8) besteht, so ist $z^{\frown}/z^{\smile}$ nach [A 2, 4. 1., Hilfssatz 1] eine Umreichfunktion. Diese benutzen wir, wenn wir im folgenden um die Verbandelemente Umreiche konstruieren.

[1]) Die Angaben in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Arbeit.

2. 3. In den Mengen $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ erkennen wir leicht Teilbünde von V: Da aus $u \in V^{\smile}$ und $v \in V^{\smile}$ offenbar $u \cup v \in V^{\smile}$ folgt, so ist $u \cup v$ das $k.\,g.\,V.$ von u und v in $V^{\smile}$. Es handelt sich jetzt um den $g.\,g.\,T.$ Da nach Fig. 1 aus $p' \in V^{\smile}$ und $q' \in V^{\smile}$ nicht notwendig $p' \cap q' \in V^{\smile}$ folgt, so ist $V^{\smile}$ $i.\,A.$ kein Teilverband von V. Doch gibt es zu einem $u \in V^{\smile}$ und $v \in V^{\smile}$ in $V^{\smile}$ immer einen $g.\,g.\,T.$ Denn zunächst einmal ist $t = (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v)$ offenbar ein $V^{\smile}$ angehörender Teiler von u und v. Und weiter genügt jeder $V^{\smile}$ angehörende gemeinsame Teiler von u und v der Gleichung $z = z^{\smile}$ und $z \equiv u \cap v$, also auch $z \equiv (u \cap v)^{\smile}$ d. h. $z \equiv t$. Demnach ist t der $g.\,g.\,T.$ von u und v in $V^{\smile}$ und $V^{\smile}$ ein Teilbund von V. Und dual.

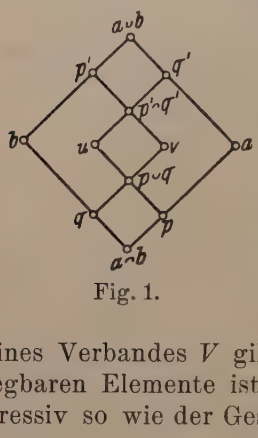


Fig. 1.

Satz 1. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge der nach a und b progressiv zerlegbaren Elemente ist ein Teilbund $V^{\smile}$ von V. Dieser multipliziert progressiv so wie der Gesamtverband V, regressiv aber nach der Methode

$$(u \cap v)^{\smile} = (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v). \tag{10}$$

Und dual

2. 4. Von hieraus wird klar, was die Ausdrücke (1) in einem allgemeinen Verbande bedeuten:

$$U^{\smile} = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \tag{11 a}$$

und

$$U^{\frown} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b} \tag{11 b}$$

sind Teilverbände der Teilbünde $V^{\smile}$ bzw. $V^{\frown}$. Und zwar besteht $U^{\smile}$ aus den $V^{\smile}$ angehörenden Vielfachen von $a \cap b$ und $U^{\frown}$ aus den $V^{\frown}$ angehörenden Teilern von $a \cup b$. Dem Gesamtverbande fügen sich $U^{\smile}$ und $U^{\frown}$ als Teilbünde ein. Immerhin multipliziert $U^{\smile}$ progressiv und $U^{\frown}$ regressiv so wie V. Fallen also beide bei einem speziellen a, b zusammen, dann als Teilverband von V. Für die modularen Verbände ist charakteristisch, daß dies bei jedem beliebigen a, b zutrifft.

2. 5. Da die Elemente von $V^{\smile}$ unter $a \cup b$ liegen, die von $V^{\frown}$ über $a \cap b$, so ist

$$V^{\smile} \cap V^{\frown} = U^{\smile} \cap U^{\frown}. \tag{12}$$

Dies ist die Menge derjenigen Elemente z, die sowohl progressiv wie regressiv nach a und b zerlegt werden können. Wir wollen sie kurz die nach a und b zerlegbaren Elemente nennen.

Erklärung 1. Zerlegbar nach a und b heißt ein Element, wenn es sowohl progressiv wie regressiv nach a und b zerlegt werden kann.

Die charakteristische Bedingung der Zerlegbarkeit von z nach a und b lautet $z^{\smile} = z = z^{\frown}$. Wegen (8) genügt es, $z^{\smile} = z^{\frown}$ zu fordern. Daher kann man nach 2. 2. auch sagen: Zerlegbar nach a und b ist das Element z genau dann, wenn sein Umreich nur aus z allein besteht.

3. Fastzerlegbarkeit nach a und b.

3. 1. Diese Bemerkung veranlaßt uns, den Begriff der Zerlegbarkeit wie folgt zu verallgemeinern:

Erklärung 2. Fastzerlegbar nach a und b heißt ein Element, wenn es einem kleinsten Umreich $z^{\frown}/z^{\smile}$ angehört.

Nach [A 2, 4. 2., Hilfssatz 2] lautet die charakteristische Bedingung der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

$$z^{\frown\smile} = z^{\smile} \text{ und } z^{\smile\frown} = z^{\frown} \tag{13}$$

oder in Subsumptionsform

$$z^{\frown\smile} =\!\!(= z =\!\!(= z^{\smile\frown} \tag{14}$$

Die Ausrechnung ergibt

$$z^{\frown\smile} = (a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z)) \tag{15a}$$

$$z^{\smile\frown} = (a \cup (b \cap z)) \cap (b \cup (a \cap z)) \tag{15b}$$

also für die Bedingung (14) der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

$$(a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z)) =\!\!(= z =\!\!(= (a \cup (b \cap z)) \cap (b \cup (a \cap z)). \tag{16}$$

3. 2. Die Frage läßt sich auf eine bekannte zurückführen: Die Umreichfunktion $z^{\frown}/z^{\smile}$ gestattet die Zerlegung

$$\frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)} = \frac{b \cup z}{a \cap z} \cap \frac{a \cup z}{b \cap z} \tag{17}$$

weil das Zwischenreich links wie der Durchschnitt der beiden Zwischenreiche rechts aus den Elementen besteht, die über $a \cap z$ und $b \cap z$ und unter $b \cup z$ und $a \cup z$ liegen. Entsprechend läßt sich auch die Bedingung (16) in die beiden

$$a \cap (b \cup z) =\!\!(= z =\!\!(= b \cup (a \cap z) \tag{18a}$$

$$b \cap (a \cup z) =\!\!(= z =\!\!(= a \cup (b \cap z) \tag{18b}$$

zerlegen und das sind nach [A 2, 4. 2.] die charakteristischen Bedingungen dafür, daß die Umreichfunktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ bzw. $(a \cup z)/(b \cap z)$ an der Stelle z einen Kleinstwert besitzen. Also gilt:

Hilfssatz 1. Die Umreichfunktion $((a \cup z) \cap (b \cup z))/((a \cap z) \cup (b \cap z))$ besitzt genau an denjenigen Stellen Kleinstwerte, an denen die Funktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ und $(a \cup z)/(b \cap z)$ beide einen Kleinstwert besitzen und ihre Kleinstwerte sind die Durchschnitte der Kleinstwerte jener.

Nun werden doch die Kleinstwerte der Funktionen $(b \cup z)/(a \cap z)$ und $(a \cup z)/(b \cap z)$ nach [A 1, 7.2.] von den Zwischenreichen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) gebildet. Also erhalten wir als vorläufige Antwort auf die Frage nach den fastzerlegbaren Elementen:

Satz 2.1. Fastzerlegbar nach a und b ist ein Element genau dann, wenn es ein Zwischenelement sowohl der einen wie der anderen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) ist.

3.3. Weiter ergibt der Hilfssatz, daß sich die kleinsten Umreiche als Durchschnitte zweier Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten, je eines von jeder, darstellen lassen, übrigens nur auf eine Art, weil die Zwischenreiche als Kleinstwerte von Umreichfunktionen durch irgend ein Element ihres Durchschnittes bereits bestimmt sind. Umgekehrt ist der Durchschnitt zweier Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten, wenn er nicht leer ist, ein kleinstes Umreich. Über die Frage, wann dies zutrifft, gibt der folgende Hilfssatz Auskunft:

Hilfssatz 2. Zwei Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2 haben genau dann Elemente gemein, wenn $x_1 \cup x_2 = y_1 \cap y_2$ besteht. In diesem Falle ist

$$\frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_1 \cap y_2}{x_1 \cup x_2}. \tag{19}$$

Beweis. Wenn die beiden Zwischenreiche das Element z gemein haben, dann gilt $x_1 = z = y_2$ und $x_2 = z = y_1$, also auch $x_1 \cup x_2 = y_1 \cap y_2$. Umgekehrt folgt hieraus, daß die beiden Zwischenreiche die Elemente $x_1 \cup x_2$ und $y_1 \cap y_2$ gemein haben.

Bei Zwischenreichen der beiden Schwesterperspektivitäten (5) ist die Schnittbedingung stets erfüllt. Denn aus den rechten Gleichungen (5) folgt $a = y_2$ und $b = y_1$, und somit aus den linken

$$\begin{aligned} x_1 \cup x_2 &= (a \cap y_1) \cup (b \cap y_2) \\ &= (a \cap y_1 \cap y_2) \cup (b \cap y_1 \cap y_2) = y_1 \cap y_2. \end{aligned} \tag{20}$$

Damit ist bewiesen:

Satz 2.2. Irgend zwei Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2 der beiden Schwesterperspektivitäten (5) bilden einen nicht-leeren Durchschnitt $(y_1 \cap y_2)/(x_1 \cup x_2)$ und die Kleinstwerte der Umreichfunktion $z\hat{}/z\check{}$ sind nichts anderes als diese Durchschnitte.

Da jedes fastzerlegbare Element einem kleinsten Umreich angehört, ein kleinstes Umreich nur fastzerlegbare Elemente enthält und irgend zwei kleinste Umreiche elementefremd sind, so sind die kleinsten Umreiche d. h. jene Durchschnitte elementefremde Klassen, auf die sich die fastzerlegbaren Elemente verteilen.

4. Zusammensetzung der Schwesterperspektivitäten.

4.1. In den modularen Verbänden gilt wegen $x_1 = y_2$ über (20) hinaus $x_1 \cup x_2 = x_1 \cup (b \cap y_2) = (x_1 \cup b) \cap y_2 = y_1 \cap y_2$. Hier haben

also irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten genau ein Element gemein, so daß Fastzerlegbarkeit nach a und b Zerlegbarkeit nach a und b bedeutet.

In einem allgemeinen Verbande dagegen tritt an die Stelle der Gleichung $x_1 \cup x_2 = y_1 \cap y_2$ eine Isomorphie. Wir erhalten sie, wenn wir die beiden Schwesterperspektivitäten (5) dadurch zusammensetzen, daß wir die Örter $x = x_1 \cup x_2$ und $y = y_1 \cap y_2$ der Durchschnitte

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2} \tag{21}$$

welche die Zwischenreiche der einen Perspektivität mit denen der anderen bilden, einander zuordnen. Da diese Durchschnitte nämlich die kleinsten Umreiche $z^\frown/z^\smile$ darstellen, so ergibt sich nach [A 2, Hilfssatz 3] so die Austauschisomorphie

$$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \qquad y = (a \cup x) \cap (b \cup x). \tag{22}$$

Gleich den Perspektivitäten genügt sie $x = y$, so daß wir von ihren Zwischenreichen y/x sprechen können. Nennen wir sie eine (spezielle) Überperspektivität, dann gilt also: Die Durchschnitte der Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) sind die Zwischenreiche der Überperspektivität (22).

4. 2. Die eben durch Zusammensetzung der beiden Schwesterperspektivitäten gewonnene Überperspektivität soll jetzt wieder in die beiden Schwesterperspektivitäten zerlegt werden: Nach 3. 3. ist die Zerlegung (21) ihrer Zwischenreiche y/x in Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten eindeutig. Diese Eindeutigkeit überträgt sich auf die Zerlegungen

$$x = x_1 \cup x_2 \text{ mit } x_1 \in a/(a \wedge b) \text{ und } x_2 \in b/(a \wedge b) \tag{23a}$$

$$y = y_1 \cap y_2 \text{ mit } y_1 \in (a \vee b)/b \text{ und } y_2 \in (a \vee b)/a \tag{23b}$$

der Örter der Zwischenreiche. Da nämlich y/x ein kleinstes Umreich ist, so bestimmt x das Umreich y/x, dieses, wie gesagt die Zwischenreiche y_1/x_1 und y_2/x_2, letztere x_1 und x_2. Und dual. Ist ferner $z \in y/x$, dann deckt sich die Zerlegung (21) mit der Zerlegung (17). Daher ist

$$x_1 = a \cap z, \quad x_2 = b \cap z \tag{24a}$$

$$y_1 = b \cup z, \quad y_2 = a \cup z \quad \text{mit } z \in y/x. \tag{24b}$$

Wählt man in (24a) $z = x$, in (24b) $z = y$, so ergibt sich insbesondere

$$x_1 = a \cap x, \quad x_2 = b \cap x \tag{25a}$$

$$y_1 = b \cup y, \quad y_2 = a \cup y. \tag{25b}$$

Ist also $x \rightleftarrows y$ die Überperspektivität, dann sind $a \cap x \rightleftarrows b \cup y$ und $b \cap x \rightleftarrows a \cup y$ die beiden Schwesterperspektivitäten. In der Tat braucht man, was gestattet ist, in (25) nur x und y zu vertauschen, um Gleichungen zu erhalten, aus denen sofort die Gleichungen (5) der beiden Schwesterperspektivitäten hervorgehen.

4. 3. Nebenbei haben wir bemerkt, daß die Funktionen $a \cap z$, $b \cap z$, $a \cup z$ und $b \cup z$ innerhalb eines kleinsten Umreiches $c^\frown/c^\smile$ konstant sind. Wir können hinzufügen, daß mindestens eine von ihnen ihren Wert ändert, wenn die Variable z das Umreich $c^\frown/c^\smile$ verläßt. Denn aus der Konstanz aller folgt die von $z^\frown/z^\smile$ und $z^\frown/z^\smile$ hat nur innerhalb $c^\frown/c^\smile$ den Wert $c^\frown/c^\smile$.

Erklärung 3. Die Elemente x und y heißen für a und b kongruent, wenn

$$a \cap x = a \cap y, \quad b \cap x = b \cap y \tag{26a}$$

$$a \cup x = a \cup y, \quad b \cup x = b \cup y \tag{26b}$$

besteht. Wir schreiben dann kurz $x \equiv y \ (a, b)$.

Ein kleinstes Umreich $c^\frown/c^\smile$, so können wir jetzt sagen, ist eine Klasse für a und b kongruenter Elemente.

4. 4. Wir fassen die Ergebnisse zusammen:

Satz 3. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes gilt: Die Schwesterperspektivitäten

$$x_1 = a \cap y_1, \quad y_1 = b \cup x_1 \tag{27a}$$

$$x_2 = b \cap y_2, \quad y_2 = a \cup x_2 \tag{27b}$$

lassen sich wie folgt zusammensetzen: Jedes Zwischenreich y_1/x_1 der ersten Perspektivität hat mit jedem Zwischenreich y_2/x_2 der zweiten Elemente gemein. Insgesamt bilden diese ebenfalls ein Zwischenreich

$$\frac{y}{x} = \frac{y_1}{x_1} \cap \frac{y_2}{x_2}. \tag{28}$$

Ordnen wir die Örter dieser Zwischenreiche einander zu, dann erhalten wir die Austauschisomorphie

$$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x) \tag{29}$$

(die deshalb eine Überperspektivität heißen mag).

Zwischen den Örtern der Zwischenreiche (28) bestehen die Beziehungen

$$x = x_1 \cup x_2 \tag{30a}$$

$$y = y_1 \cap y_2 \tag{30b}$$

und

$$x_1 = a \cap x, \quad x_2 = b \cap x \tag{31a}$$

$$y_1 = b \cup y, \quad y_2 = a \cup y. \tag{31b}$$

Sind daher $x_1 \rightleftarrows y_1$ und $x_2 \rightleftarrows y_2$ die beiden Schwesterperspektivitäten, dann ist $x_1 \cup x_2 \rightleftarrows y_1 \cap y_2$ die Überperspektivität. Ist $x \rightleftarrows y$ die Überperspektivität, dann sind $a \cap x \rightleftarrows b \cup y$ und $b \cap x \rightleftarrows a \cup y$ die beiden Schwesterperspektivitäten.

Zusatz. Das aus den Gleichungen (27) der beiden Schwestesperspektivitäten und den Zusammensetzungsformeln (30) bestehende Gleichungssystem ist dem aus den Gleichungen (29) der Überperspektivität und den Zerlegungsformeln (31) bestehenden Gleichungssystem auf Grund der Verbandaxiome gleichwertig.

Folgerung. Die Zwischenreiche der Überperspektivität sind Klassen für a und b kongruenter Elemente. Es sind die Klassen der nach a und b fastzerlegbaren Elemente.

5. Die Überperspektivität.

5. 1. Die Überperspektivität (29), die nach 4. 1 in den modularen Verbänden stets als identische Zuordnung auftritt, ist in einem allgemeinen Verbande die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ der Örter x und y der kleinsten Umreiche. Das läßt sich noch besser sagen: Ein jedes Umreich $z^{\frown}/z^{\smile}$ verbindet ein progressiv nach a und b zerlegbares Element $z^{\smile}$ mit einem regressiv nach a und b zerlegbarem Element $z^{\frown}$. Für die kleinsten Umreiche ist charakteristisch, daß sie kein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten. Also gibt es zu jedem progressiv nach a und b zerlegbarem Element x, das einem kleinsten Umreich angehört, genau ein regressiv nach a und b zerlegbares Element y, das demselben (kleinsten) Umreich angehört, und umgekehrt. Eben diese Elemente x und y ordnet die Überperspektivität einander zu.

5. 2. Demnach ist sie eine Isomorphie zwischen den Mengen derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können. Das sind nach dem Mengenisomorphiesatz [A 2, Satz 1] die Mengen $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ der Deckelemente der Transformationen $z^{\smile\smile}$ bzw. $z^{\frown\frown}$. Aus ihren Gleichungen $z = z^{\smile\smile}$ bzw. $z = z^{\frown\frown}$ oder auch sofort aus (23) folgt

$$V^{\smile\smile} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \tag{32 a}$$

$$V^{\frown\frown} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}. \tag{32 b}$$

Ein Deckelement jener Transformationen ist übrigens jedes Bildelement, denn nach [A 1, 6. 2.] gilt für beliebige z ja $a \cap (b \cup z) \in a/(a \wedge b)$ und $b \cap (a \cup z) \in b/(a \wedge b)$, also nach (15 a) auch $z^{\smile\smile} \in V^{\smile\smile}$. Und dual. Hiernach sind $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ die von den Transformationen $z^{\smile\smile}$ bzw. $z^{\frown\frown}$ entworfenen Bilder des Gesamtverbandes V.

5. 3. Nebenbei hat sich die Idempotenz dieser Transformationen ergeben:

$$z^{\smile\smile\smile\smile} = z^{\smile\smile}, \; z^{\frown\frown\frown\frown} = z^{\frown\frown}. \tag{33}$$

Aus (33) und (9) folgt nach [A 2, 3.], daß die sechs Transformationen $z^{\smile}, z^{\frown}, z^{\smile\smile}, z^{\frown\frown}, z^{\smile\frown}$ und $z^{\frown\smile}$ eine Halbgruppe von Idempotenten bilden,

und für die Überperspektivität ergeben sich so die beiden Parameterdarstellungen

(34) $z^{\smile\smile} \rightleftarrows z^{\frown\frown}$ und $z^{\smile\frown} \rightleftarrows z^{\frown\smile}$ mit $z \in V$.

5. 4. Die Beschreibung 5. 1. der Überperspektivität läßt sich noch weiter vereinfachen. Offenbar gilt

(35) $$V^{\smile\smile} =(= V^{\smile}, \quad V^{\frown\frown} =(= V^{\frown}.$$

Ein $x \in V^{\smile}$ und $y \in V^{\frown}$ genügendes Zwischenreich y/x soll ein Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ heißen und ein kürzestes Zwischenreich[1]) dieser Teilbünde, wenn es kein andereres Zwischenreich von ihnen umfaßt. x/y ist genau dann ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$, wenn es mit $V^{\smile}$ das Element x und nur x und mit $V^{\frown}$ das Element y und nur y gemein hat. Die Zwischenreiche der Überperspektivität (29) sind nach 5. 1. solche kürzesten Zwischenreiche von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Es sei umgekehrt y/x ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Dann hat man $x = x^{\smile} =(= y = y^{\frown}$ und folglich $x =(- x^{\frown} =(- y$ sowie $x =(= y^{\smile} -(= y$. Da $x^{\frown} \in V^{\frown}$ und $y^{\smile} \in V^{\smile}$ gilt, so folgt $x^{\frown} = y$ und $y^{\smile} = x$. Also ist y/x ein Zwischenreich der Überperspektivität (29). Im ganzen ist bewiesen: Die Zwischenreiche der Überperspektivität (29) werden von den kürzesten Zwischenreichen der Teilbünde der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente gebildet.

5. 5. Die kürzesten Zwischenreiche von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ verbinden also die $x \in V^{\smile\smile}$ mit $y \in V^{\frown\frown}$ und umgekehrt. Daher sind sie zugleich kürzeste Zwischenreiche von $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$. Es sei umgekehrt y/x ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$. Dann finden wir wie eben $x =(- x^{\frown} (= y$ und $x =(- y^{\smile} (y$. Und da, aus $x \in V^{\smile\smile}$ und $y \in V^{\frown\frown}$ folgend, $x^{\frown} \in V^{\frown\frown}$ und $y^{\smile} \in V^{\smile\smile}$ gilt, so ist wieder $x^{\frown} = y$ und $y^{\smile} = x$. Also ist y/x ein Zwischenreich der Überperspektivität und folglich ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$. Im ganzen: Ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ ist ein kürzestes Zwischenreich von $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ und umgekehrt.

5. 6. Wir fassen die Hauptergebnisse zusammen:

Satz 4. Die Austauschisomorphie

(36) $$x = (a \cap y) \cup (b \cap y), \quad y = (a \cup x) \cap (b \cup x)$$

(„Überperspektivität") ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ solcher progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbarer Elemente x und y, die $x =(= y$ genügen und zwischen sich kein weiteres progressiv oder regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten. Ihre Zwischenreiche y/x werden durch die Kleinstwerte der Umreichfunktion

(37) $$U(z) = \frac{(a \cup z) \cap (b \cup z)}{(a \cap z) \cup (b \cap z)}$$

[1]) In [A 2, 4. 4. bis 4. 6.] „kleinstes Zwischenreich".

dargestellt. Daher ist die Überperspektivität (36) eine Isomorphie

$$\frac{a}{a\wedge b} \vee \frac{b}{a\wedge b} \sim \frac{a\vee b}{a} \wedge \frac{a\vee b}{b} \tag{38}$$

zwischen den Mengen derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können. Sie ist durch diese beiden Mengen bestimmt. Zu jedem Element x der ersten Menge nämlich gibt es genau ein Element y der zweiten, so daß $x \asymp y$ besteht und zwischen x und y kein weiteres Element der einen oder anderen Menge liegt, und umgekehrt. Eben diese Elemente ordnet die Überperspektivität einander zu. — Die Überperspektivität gestattet die beiden Parameterdarstellungen

$$\begin{aligned} x &= (a\cap(b\cup z))\cup(b\cap(a\cup z)), \\ y &= (b\cup(a\cap(b\cup z)))\cap(a\cup(b\cap(a\cup z))) \end{aligned} \tag{39 a}$$

$$\begin{aligned} x &= (a\cap(b\cup(a\cap z)))\cup(b\cap(a\cup(b\cap z))) \\ y &= (b\cup(a\cap z))\cap(a\cup(b\cap z)). \end{aligned} \tag{39 b}$$

Folgerung 1. Die Menge $F(a, b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist durch die Mengen $V^{\frown}$ und $V^{\frown\frown}$ derjenigen fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können, bestimmt. Sie besteht nämlich aus den Elementen der kürzesten Zwischenreiche von $V^{\frown\frown}$ und $V^{\frown\frown}$. — Daher scheint für sie das Symbol

$$F(a, b) = \begin{matrix} \frac{a\vee b}{a} \wedge \frac{a\vee b}{b} \\ \frac{a}{a\wedge b} \vee \frac{b}{a\wedge b} \end{matrix} \tag{40}$$

passend zu sein.

Ist $z \in F(a, b)$, dann sind $z^{\frown}$ und $z^{\frown}$ Elemente, die sich in der Überperspektivität entsprechen. Und da sich jedes Paar entsprechender Elemente so darstellen läßt, so hat man:

Folgerung 2. Die Überperspektivität (36) gestattet die Parameterdarstellung

$$x = (a\cap z)\cup(b\cap z),\ y = (a\cup z)\cap(b\cup z) \text{ mit } z\in F(a, b). \tag{41}$$

Sie geht aus den Parameterdarstellungen (39) bzw. (34 durch (13) hervor. — Hier tritt wieder der Zusammenhang mit den beiden Schwesterperspektivitäten (5) deutlich zutage. Denn

$$x_1 = a\cap z,\ y_1 = b\cup z \text{ mit } z\in F(a, b) \tag{42 a}$$

bzw.

$$x_2 = b\cap z,\ y_2 = a\cup z \text{ mit } z\in F(a, b) \tag{42 b}$$

sind zufolge [A 1, 7. 2.] Parameterdarstellungen dieser Schwesterperspektivitäten.

Aus Satz 4 folgt ferner noch, daß die Deckelemente der Überperspektivität von den $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ gemeinsamen Elementen gebildet werden. Andererseits folgt schon aus den Gleichungen (36) der Überperspektivität, daß sie von den nach a und b zerlegbaren Elementen gebildet werden, also von den Elementen der Menge $V^{\smile}\cap V^{\frown} = U^{\smile}\cap U^{\frown}$. Demnach gilt:

Folgerung 3. Der Durchschnitt der beiden Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ besteht aus den nach a und b zerlegbaren Elementen. Als Formel:

$$(43)\quad \left(\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}\right)\cap\left(\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}\right)=\left(\frac{a}{a\cap b}\vee\frac{b}{a\cap b}\right)\cap\left(\frac{a\cup b}{a}\wedge\frac{a\cup b}{b}\right).$$

Genau die nach a und b zerlegbaren Elemente sind die Deckelemente der Überperspektivität.

6. Die Teilbünde $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$.

6. 1. Zerlegbar nach a und b sind insbesondere die Elemente der „kleinen Teilbünde“ $a/(a\wedge b)$, $b/(a\wedge b)$, $(a\vee b)/b$ und $(a\vee b)/a$. Also umfaßt jede der beiden Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ sowohl die Faktoren, aus denen sie selbst sich nach (32) zusammensetzt, wie auch die Faktoren, aus denen sich die andere zusammensetzt.

6. 2. Wir wollen jetzt zeigen, daß $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ ebenfalls Teilbünde von V sind. Den Ausgangspunkt bildet der

Hilfssatz 3. Die Zerlegung $x = x_1\cup x_2$ eines $x\in V^{\smile\frown}$ nach $V_1^{\smile\frown} = a/(a\wedge b)$ und $V_2^{\smile\frown} = b/(a\wedge b)$ ist eindeutig. Sie zerlegt x in seine größten progressiven Komponenten nach a und b. Und dual.

Ein Beweis des Hilfssatzes hat sich schon in 4. 2. ergeben. Wir bestätigen ihn durch einen zweiten: Da die Teilbünde $V_1^{\frown}$ und $V_2^{\smile}$ nach [A 1, 6. 2.] die Gleichungen $z = a\cap(b\cup z)$ bzw. $z = b\cap(a\cup z)$ haben, so hat man $x_1 = a\cap(b\cup x_1)$ und $x_2 = b\cap(a\cup x_2)$, also wegen $x_1 \mathrel{-\!\!(} a$ und $x_2 \mathrel{-\!\!(} b$ auch $x_1 = a\cap(b\cup x)$ und $x_2 = b\cap(a\cup x)$. Hiernach ist die Zerlegung eindeutig. Es folgt $x_1 \mathrel{)\!\!-} a\cap x$ und $x_2 \mathrel{)\!\!-} b\cap x$. Andererseits ist, weil es sich um eine Zerlegung nach a und b handelt, nach [A 1, 4. 3.] $x_1 \mathrel{-\!\!(} a\cap x$ und $x_2 \mathrel{-\!\!(} b\cap x$. Also ist $x_1 = a\cap x$ und $x_2 = b\cap x$.

6. 3. $V^{\smile\frown}$ ist eine Teilmenge von $V^{\smile}$ und $V^{\smile}$ ein Teilbund von V, der regressiv nach der Methode (10) multipliziert. Ist speziell $u\in V^{\smile\frown}$ und $v\in V^{\smile\frown}$, dann ist nach dem letzten Hilfssatz $a\cap u\in V_1^{\smile}$ und $a\cap v\in V_1$. Und da $V_1^{\smile\frown}$ regressiv wie V multipliziert, so ist auch $a\cap u\cap v\in V_1^{\frown}$. Entsprechend ist $b\cap u\cap v\in V_2^{\smile\frown}$. Daraus folgt, daß $(a\cap u\cap v)\cup(b\cap u\cap v)\in V^{\smile\frown}$ ist. Folgt also aus $u\in V^{\smile\frown}$ und $v\in V^{\smile\frown}$ immer $(u\cap v)^{\smile}\in V^{\smile\frown}$, dann ist $(u\cap v)^{\smile}$ der g. g. T. von u und v wie in $V^{\smile}$ so a fortiori in $V^{\frown}$. Besitzen aber irgend zwei Elemente von $V^{\smile\frown}$ in $V^{\smile\frown}$ einen g. g. T. und dual irgend zwei von $V^{\frown\smile}$ in $V^{\frown\smile}$ ein k. g. V., dann sind die isomorphen Mengen $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ nach [A 1. 3.] Teilbünde von V, und zwar isomorphe.

Von diesen Teilbünden multipliziert also $V^{\smile}$ regressiv so wie $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ progressiv so wie $V^{\frown}$. Das progressive Produkt eines $u \in V^{\smile}$ und $v \in V^{\smile}$ ermitteln wir auf dem Umwege über die Überperspektivität: Diese führt u und v in die Elemente $u^{\frown}$ bzw. $v^{\frown}$ von $V^{\frown}$ über, die in $V^{\frown}$ das progressive Produkt $(a \cup u^{\frown} \cup v^{\frown}) \cap (b \cup u^{\frown} \cup v^{\frown})$ bilden. Da nach der Folgerung aus Satz 3 die Elemente $u^{\frown}$ und $v^{\frown}$ zu u bzw. v für a und b kongruent sind, so läßt sich das Produkt einfacher $(a \cup u \cup v) \cap (b \cup u \cup v)$, kurz $(u \cup v)^{\frown}$ schreiben. Ihm entspricht durch die Überperspektivität in $V^{\smile}$

$$(44) \qquad (u \cup v)^{\smile} = (a \cap (b \cup u \cup v)) \cup (b \cap (a \cup u \cup v)).$$

Dies ist das k. g. V. von u und v in $V^{\smile}$. Und dual.

6. 4. Wir bestätigen diese Ergebnisse durch einen zweiten Beweis: Ordnen wir jedem $x \in V^{\smile}$ das Paar (x_1, x_2) seiner Komponenten nach $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\frown}$ zu, dann entsteht nach dem Hilfssatz 3 eine umkehrbar eindeutige Abbildung $x \rightleftarrows (x_1, x_2)$ der Menge $V^{\smile}$ auf die Menge $V_1^{\smile} . V_2^{\frown}$ der Paare (x_1, x_2) mit $x_1 \in V_1^{\smile}$ und $x_2 \in V_2^{\frown}$. Setzen wir $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$, wenn $x_1 = x_1'$ und $x_2 = x_2'$ ist, dann folgt aus $x = x'$ nach dem Hilfssatz 3 immer $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$ und umgekehrt aus $(x_1, x_2) = (x_1', x_2')$ immer $x = x'$. Also ist $V^{\smile} \sim V_1^{\smile} . V_2^{\frown}$. Und dual. Wir haben also

$$(45\,a) \qquad \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \sim \frac{a}{a \wedge b} \cdot \frac{b}{a \wedge b}$$

$$(45\,b) \qquad \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \sim \frac{a \vee b}{a} \cdot \frac{a \vee b}{b}.$$

Da $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$ Verbände sind, so ist auch $V_1^{\smile} . V_2^{\smile}$ einer. Ist aber $V_1^{\smile} . V_2^{\frown}$ ein Verband, dann ist auch die $V_1^{\smile} . V_2^{\smile}$ isomorphe Menge $V^{\smile}$ einer. Und da $V^{\smile}$ ein Verband ist hinsichtlich der Subsumptionsbeziehung von V, so ist $V^{\smile}$ ein Teilbund von V. Und dual.

In Fortführung dieses Gedankenganges gewinnt man die Multiplikationsformeln von $V^{\smile}$ aus denen von $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$ über die von $V_1^{\smile} . V_2^{\smile}$. Und dual. Kurz gesagt, kann man in $V^{\smile}$ wie in $V^{\frown}$ „komponentenweise" multiplizieren.

6. 5. Nach 6. 1. umfaßt der Teilbund $V^{\smile}$ die Teilbünde $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$. Und da aus dem Hilfssatz 3 folgt, daß diese jeden $V^{\smile}$ angehörenden Teiler von a bzw. b enthalten, so stellen sie die Teilverbände der $V^{\smile}$ angehörenden Teiler von a bzw. b dar. Also sind sie progressive Hauptideale von $V^{\smile}$. Und dual.

Die Zerlegung $x = x_1 \cup x_2$ der $x \in V^{\smile}$ nach jenen Hauptidealen ist auch insofern eine interne Angelegenheit von $V^{\smile}$, als sie zufolge der Schlußbemerkung von [A 1, 2.] als eine mit der $V^{\smile}$ eigentümlichen progressiven Multiplikation ausgeführte Zerlegung aufgefaßt werden kann. In der Tat geht (44) für ein $u \in V_1^{\smile}$ und ein $v \in V_2^{\frown}$ in $(u \cup v)^{\smile} = (a \cap (b \cup u)) \cup (b \cap (a \cup v)) = u \cup v$ über. Und dual. — Da also alle $x \in V^{\smile}$ innerhalb $V^{\smile}$ auf genau eine Art progressiv nach a und b zerlegt werden können, so sind a und b komplementäre neutrale Elemente

von $V^{\smile\frown}$. Demnach sind $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$ von komplementären neutralen Elementen des Teilbundes $V^{\smile\frown}$ erzeugte progressive Hauptideale von $V^{\smile\frown}$. Und dual.

6. 6. Nach 6. 1. werden die Teilbünde $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$ auch von dem zu $V^{\smile\frown}$ dualen Teilbund $V^{\frown\smile}$ umfaßt. Es gehört also jeder $V^{\smile\frown}$ angehörende Teiler von a oder b auch $V^{\frown\smile}$ an. Hiervon gilt auch die Umkehrung: Ein $V^{\frown\smile}$ angehörender Teiler u von a genügt $u=(a\cup u)\cap(b\cup u)=a\cap(b\cup u)$ d. h. der Gleichung von $V_1^{\smile}$. Also gehört er $V^{\smile\frown}$ an. Demnach werden $V_1^{\smile}$ und $V_2^{\smile}$ auch von dem Teilbund $V^{\frown\smile}$ als von komplementären neutralen Elementen erzeugte progressive Hauptideale umfaßt. Und dual.

6. 7. Wir wollen schließlich noch bemerken, daß die Teilbünde $V^{\smile\frown}$ und $V^{\frown\smile}$ mit a und b so multiplizieren wie der Gesamtverband V. Aus $x\in V^{\smile\frown}$ folgt nämlich, wie gesagt, $a\cap x\in V_1^{\smile}$ und somit $a\cap x\in V^{\smile\frown}$ und andererseits ist wegen der progressiven Zerlegbarkeit von x nach a und b offenbar $a\cup x\in V_2^{\frown}$ und somit $a\cup x\in V^{\frown}$. Also stellen $a\cap x$ und $a\cup x$ den g. g. T. bzw. das k. g. V. von a und x in $V^{\smile\frown}$ dar. — Im ganzen hat sich ergeben:

Satz 5. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge

$$V^{\smile\frown}=\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{b\wedge a} \tag{46}$$

derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv nach a und b zerlegt werden können, ist ein Teilbund von V. Dieser multipliziert regressiv so wie der Teilbund $V^{\smile}$ der progressiv nach a und b zerlegbaren Elemente, nämlich nach der Methode

$$(u\cap v)^{\smile}=(a\cap u\cap v)\cup(b\cap u\cap v) \tag{47}$$

progressiv dagegen nach der Formel

$$(u\cup v)^{\smile\frown}=(a\cap(b\cup u\cup v))\cup(b\cap(a\cup u\cup v)). \tag{48}$$

Mit a und b multipliziert er daher wie der Gesamtverband.

Er umfaßt die Teilbünde $a/(a\wedge b)$ und $b/(a\wedge b)$ als die von a bzw. b erzeugten progressiven Hauptideale, ebenso aber auch die Teilbünde $(a\vee b)/a$ und $(a\vee b)/b$ als die von a und b erzeugten regressiven Hauptideale. a und b sind komplementäre neutrale Elemente von ihm.

Und dual.

Folgerung. Die Überperspektivität (36) ist eine Teilbundisomorphie.

Fig. 1 gibt ein einfaches Beispiel zu unseren Sätzen. Hier sind alle Elemente nach a und b fastzerlegbar, die Randelemente sogar zerlegbar. Es ist $V^{\smile\frown}=V^{\smile}$ und $V^{\frown\smile}=V^{\frown}$. Die beiden Teilbünde enthalten außer den Randelementen, die ihren Durchschnitt ausmachen, nur noch je ein Element, nämlich $p\cup q$ bzw. $p'\cap q'$. Die Elemente u, v, $p\cup q$ und $p'\cap q'$ erfüllen ein kleinstes Umreich, alle anderen kleinsten Umreiche bestehen nur aus einem einzigen Element.

7. Einschaltung über den Kongruenzbegriff.

7.1. Da die Funktionen $z^{\smile}$ und $z^{\frown}$ außer den Zerlegungen (7) nach [A 1, 4.3.] auch die Zerlegungen $z^{\frown} = (a \cap z^{\smile}) \cup (b \cap z^{\smile})$ bzw. $z^{\smile} = (a \cup z^{\frown}) \cap (b \cup z^{\frown})$ gestatten und dies die Zerlegungen in ihre größten progressiven bzw. kleinsten regressiven Komponenten nach a und b sind, andererseits aber (8) besteht, so hat man:

(49a) $$a \cap z^{\smile} = a \cap z, \quad b \cap z^{\smile} = b \cap z$$

(49b) $$a \cup z^{\frown} = a \cup z, \quad b \cup z^{\frown} = b \cup z.$$

Daraus folgt: Besitzt die Funktion $z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ an den Stellen x und y gleiche Werte, dann besitzen auch ihre Faktoren $a \cap z$ und $b \cap z$ an diesen Stellen gleiche Werte. Und dual.

7.2. Damit kommen wir auf den Kongruenzbegriff zurück, auf den wir in 4.2. stießen: Aus $x \equiv y\ (a, b)$ folgt offenbar $x^{\frown}/x^{\smile} = y^{\frown}/y^{\smile}$. Nach 7.1. gilt auch die Umkehrung. Demnach sind zwei Elemente genau dann für a und b kongruent, wenn sie gleiche Umreiche besitzen. Damit haben wir den Anschluß an den in [A 2, 4.7.] für beliebige Umreichfunktionen entwickelten Kongruenzbegriff gewonnen.

Für unsere spezielle Umreichfunktion $z^{\frown}/z^{\smile}$ gilt folgendes: Die Klasse $z \quad c$ der c kongruenten Elemente besteht aus der Gesamtheit der $z^{\frown}/z^{\smile} = c^{\frown}/c^{\smile}$ genügenden Elemente z. Sie wird von der Klassenkonstanten $c^{\frown}/c^{\smile}$ umfaßt. Fällt sie mit dieser zusammen, dann sprechen wir von einer Sonderklasse. Nach [A 2, 4.7.1.] ist ein kleinstes Umreich eine Sonderklasse für a und b kongruenter Elemente und umgekehrt.

Nach [A 2. 4.7.2.] enthält eine Klasse $z \equiv c$ für a und b kongruenter Elemente höchstens ein progressiv nach a und b zerlegbares Element und höchstens ein regressiv zerlegbares. (Dies sind gegebenenfalls die Elemente $c^{\smile}$ und $c^{\frown}$). Enthält sie sowohl ein progressiv wie ein regressiv zerlegbares, genau dann ist sie eine Sonderklasse.

Demnach sind die kleinsten Umreiche $z^{\frown}/z^{\smile}$ nichts anderes als diejenigen Klassen für a und b kongruenter Elemente, die sowohl ein progressiv wie ein regressiv nach a und b zerlegbares Element enthalten, und die nach a und b fastzerlegbaren Elemente diejenigen Element, die sowohl einem progressiv wie einem regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente für a und b kongruent sind. In der Tat läßt sich die charakteristische Bedingung (13) der Fastzerlegbarkeit von z nach a und b

(50) $$(a \cap z) \cup (b \cap z) \equiv (a \cup z) \cap (b \cup z) \qquad (a, b)$$

schreiben, was auf $z^{\smile} \equiv z \equiv z^{\frown}$ hinausläuft.

8. Die fastzerlegbaren Elemente.

8.1. Mit Hilfe des Kongruenzbegriffes läßt sich die Überperspektivität (36) im Anschluß an [A 2, 4.7.2., Satz 5] wie folgt beschreiben:

Zu einem progressiv nach a und b zerlegbaren Element x gibt es höchstens ein für a und b kongruentes Element y, das regressiv nach a und b zerlegbar ist, und umgekehrt. Die Austauschisomorphie $x = y^{\smile}$, $y = x^{\frown}$ („Überperspektivität") ist die Zuordnung $x \rightleftarrows y$ derjenigen progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren Elemente x und y, die einander für a und b tatsächlich kongruent sind. Sie läßt daher fest genau die nach a und b zerlegbaren Elemente. Im übrigen genügt sie $x = (= y$ und die Zwischenreiche y/x sind Klassen für a und b kongruenter Elemente. Es sind die Klassen der nach a und b fastzerlegbaren Elemente.

8. 2. Diese Klassen können offenbar als die Elemente eines den beiden Teilbünden $V^{\smile\smile}$ und $V^{\frown\frown}$ isomorphen Verbandes aufgefaßt werden. Statt dessen können wir auch mit den nach a und b fastzerlegbaren Elementen selbst arbeiten, wenn wir statt der Gleichungen Kongruenzen schreiben. Wir erhalten so zwei Verknüpfungsweisen der fastzerlegbaren Elemente, bei denen die Produkte $u \underset{\mathsf{F}}{\cap} v$ und $u \underset{\mathsf{F}}{\cap} v$ innerhalb einer Klasse fastzerlegbarer Elemente unbestimmt sind, sich andererseits aber auch nicht ändern, wenn man die Faktoren innerhalb solcher Klassen variiert. Um $u \underset{\mathsf{F}}{\cap} v$ zu berechnen, ersetzen wir u und v am besten durch die kongruenten Elemente $u^{\smile}$ bzw. $v^{\smile}$. Da diese $V^{\smile\smile}$ angehören, so können wir sie nach (47) regressiv multiplizieren. Und da sich in dem Ergebnis $u^{\smile}$ und $v^{\smile}$ nach (49a) wieder durch u bzw. v ersetzen lassen, so erhalten wir $u \underset{\mathsf{F}}{\cap} v \equiv (u \cap v)^{\smile}$. Und dual.

Satz 6. Verknüpft man die nach a und b fastzerlegbaren Elemente nach den Regeln

(51a) $$u \underset{\mathsf{F}}{\cup} v \equiv (a \cup u \cup v) \cap (b \cup u \cup v) \qquad (a, b)$$

(51b) $$u \underset{\mathsf{F}}{\cap} v \equiv (a \cap u \cap v) \cup (b \cap u \cap v) \qquad (a, b),$$

so genügt ihre Gesamtheit $F(a, b)$ den Verbandaxiomen mit dem Unterschied, daß die Gleichheitsbeziehung durchgängig durch die Kongruenz für a und b zu ersetzen ist. Dieser Rechenbereich geht in einen wirklichen Verband $F'(a, b)$ über, sobald man für a und b kongruente Elemente identifiziert. $F'(a, b)$ ist den beiden Teilbünden der progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegbaren fastzerlegbaren Elemente isomorph.

Die Menge der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist also sozusagen ein Verband mit ein wenig unbestimmten Elementen.

9. Zerlegende Elementepaare.

9. 1. Ist $a = (= b$, dann liegen die nach a und b fastzerlegbaren Elemente zwischen a und b und, da jedes Zwischenelement von a und

b nach a und b sogar zerlegbar ist, so sind alle fastzerlegbaren Elemente zerlegbar. Wir sagen deshalb, ein $a =(b$ genügendes Elementepaar (a, b) sei ein zerlegendes Elementepaar. Allgemein erklären wir:

Erklärung 4. Das Elementepaar (a, b) heißt zerlegend, wenn jedes nach a und b fastzerlegbare Element nach a und b zerlegbar ist.

Zerlegend ist das Elementepaar (a, b) genau dann, wenn irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) genau ein Element gemein haben, wenn also die Überperspektivität (36) als Identität auftritt.

Wenn einer der beiden Teilbünde (32) den anderen umfaßt, wenn also

$$V \; =(= V^{\frown\frown} \text{ oder } V^{\frown\frown} =(= V^{\frown} \tag{52}$$

besteht, dann ist (a, b) zerlegend. Denn z. B. aus der ersten Subsumption folgt, daß die zu den $x \in V^{\frown}$ gehörenden Zwischenreiche x/x die kürzesten Zwischenreiche von $V^{\frown}$ und $V^{\frown\frown}$ darstellen, daß also die Überperspektivität als Identität auftritt. — Übrigens zieht jede der Subsumptionen (52) die andere nach sich. Denn bei einem zerlegenden Elementepaar ist

$$\begin{aligned} V^{\frown} &= F(a, b) = V^{\frown\frown} \\ &= V^{\frown} \cap V^{\frown\frown}. \end{aligned} \tag{53}$$

Umgekehrt folgt schon aus einer einzigen dieser sechs Gleichungen, daß das Elementepaar (a, b) zerlegend ist, weil aus jeder eine der Subsumptionen (52) folgt.

Schließlich ist für zerlegende Elementepaare charakteristisch, daß a und b in $F(a, b)$ kürzbar sind. Damit ist folgendes gemeint:

Erklärung 5. Ist a ein Element und M eine Menge von Elementen desselben Verbandes V, dann soll a in M kürzbar heißen, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M aus $a \cap x = a \cap y$ und $a \cup x = a \cup y$ immer $x = y$ folgt.

Jedenfalls folgt aus ihnen, daß für ein $b \in V$ die Gleichungen $b \cup (a \cap x) = b \cup (a \cap y)$ und $b \cap (a \cup x) = b \cap (a \cup y)$ bestehen. Ist nun $M = F(a, b)$, sind also x und y Zwischenelemente sowohl der einen wie der anderen der beiden Schwesterperspektivitäten (5), dann gehen diese Gleichungen nach [A 1, 7. 1., Gleichung (18)] in $b \cup x = b \cup y$ bzw. $b \cap x = b \cap y$ über, sodaß sich aus ihnen und der Voraussetzung $x \equiv y$ (a, b) ergibt. Wir können etwa sagen, daß a und b in $F(a, b)$ bis auf Kongruenz kürzbar sind. Besteht jede Klasse kongruenter fastzerlegbarer Elemente nur aus einem einzigen Element, genau dann sind a und b in $F(a, b)$ kürzbar. Damit ist unsere Behauptung bewiesen. — Als Gesamtergebnis haben wir:

Satz 7. Das Elementepaar (a, b) ist genau dann zerlegend, wenn die Gleichungen

$$(54)\qquad \frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}=\frac{\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}}{\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}}=\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}$$
$$=\left(\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}\right)\cap\left(\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}\right)$$

bestehen. Besteht aber eine dieser Gleichungen, dann bestehen alle sechs. Es genügt sogar, eine der Subsumptionen

$$(55\,a)\qquad \frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}=(=\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}$$

und

$$(55\,b)\qquad \frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}=(=\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}$$

zu fordern, denn aus der einen folgt die andere. Auch ist jede der folgenden Eigenschaften für zerlegende Elementepaare charakteristisch:

1. Irgend zwei Zwischenreiche der beiden Schwesterperspektivitäten (5) haben genau ein Element gemein.

2. Die Überperspektivität (36) tritt als Identität auf.

3. a und b sind in der Menge der nach a und b fastzerlegbaren Elemente kürzbar.

Folgerung. Sind alle nach a und b fastzerlegbaren Elemente progressiv nach a und b zerlegbar, dann sind sie auch regressiv nach a und b zerlegbar, und umgekehrt.

9. 2. Beispiele. 9. 2. 1. Wir bemerkten schon, daß ein $a=(=b$ genügendes Elementepaar (a, b) zerlegend ist. Darüber hinaus gilt: Aus $a=(=b$ folgt $a/(a\wedge b)\vee b/(a\wedge b)=b/a=(a\vee b)/a\wedge(a\vee b)/b$.

9. 2. 2. Ist ferner einer der beiden Teilbünde $V^{\smile}$ und $V^{\frown}$ ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer. Und da er mit dem ersten zusammenfällt, so ist (a, b) zerlegend. — Beweis. Der Teilbund $V^{\smile}$ enthält a und b, also, wenn er ein Teilverband ist, mit den Elementen x auch die Elemente $x^{\frown}=(a\cup x)\cap(b\cup x)$ d. h. die von $V^{\frown}$. Und dual.

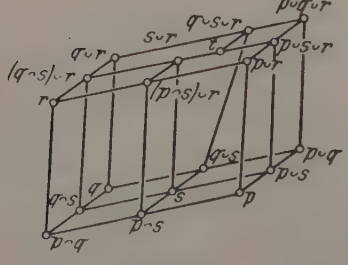


Fig. 2

Dieser Fall liegt in den modularen Verbänden stets vor. In einem modularen Verbande ist nämlich bei jedem Elementepaare $V^{\smile}$ mit dem Teilverbande $U^{\smile}$ von $V^{\smile}$ identisch und $V^{\smile}$ Teilverband von V. Und dual. Um in einem allgemeinen Verbande dasselbe Ergebnis zu erzielen, wähle man als a und b zwei neutrale Elemente von V.

9. 2. 3. Es gibt aber auch zerlegende Elementepaare, bei denen $V^{\smile}=V^{\frown}$ nur ein Teilbund, nicht aber ein Teilverband von V ist: Fig. 2 stellt einen von den vier Elementen p, q, r, s erzeugten Verband der Ordnung 19

dar. Setzen wir $p \cup q = a$ und $r = b$, dann verteilen sich seine Elemente auf die beiden Zwischenreiche $a/(a \cap b)$ und $(a \cup b)/b$ der Ordnung 9 bzw. 10. Da die $z \in a/(a \cap b)$ alle $z = a \cap (b \cup z)$ genügen, so ist $a/(a \cap b) = a/(a \wedge b)$. Daher besteht auch $(a \vee b)/b$ aus 9 Elementen und zwar ist t das in $(a \vee b)/b$ fehlende Element von $(a \cup b)/b$. Da $(a \vee b)/b$ die Elemente $p \cup s \cup r$ und $q \cup s \cup r$ enthält, ohne ihr regressives Produkt t zu enthalten, so ist $(a \vee b)/b$ kein Teilverband von V.

Die von t verschiedenen 18 Elemente sind als Elemente von $a/(a \wedge b)$ bzw. $(a \vee b)/b$ sämtlich nach a und b zerlegbar. Dagegen ist t nicht einmal fastzerlegbar nach a und b. Denn es ist $t^{\frown} = t$ und $t^{\smile} = s \cup r$ und $t/(s \cup r)$ ist kein kleinstes Umreich, weil es das Umreich $(s \cup r)/(s \cup r)$ von $s \cup r$ als kleineres umfaßt.

Da also alle nach a und b fastzerlegbaren Elemente nach a und b zerlegbar sind, so ist (a, b) ein zerlegendes Elementepaar von V. Dabei ist $V^{\frown\smile} = F(a, b) = V^{\smile\frown}$ kein Teilverband von V, weil der von $V^{\frown\frown}$ als Teilverband umfaßte Teilbund $(a \vee b)/b$ keiner ist.

9. 3. In den modularen Verbänden, fanden wir, sind alle Elementepaare zerlegend. Daß es auch nicht-modulare Verbände gibt, in denen alle Elementepaare zerlegend sind, kann man an dem nicht-modularen Verbande 5. Ordnung leicht bestätigen. Demnach stellt

$$\frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \tag{56}$$

als Identität in a und b verstanden, ein Zusatzaxiom zu den Verbandsaxiomen dar, das eine Verallgemeinerung der modularen Verbände ergibt.

(Eingegangen am 27. Februar 1948)

Literaturverzeichnis.

H. Hermes und G. Köthe.
Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wiss., I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

W. Schwan.
[A. 1] Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden, Math. Zeitschr. 51. 2 (1948), S. 125—134.

W. Schwan.
[A. 2] Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände, Math. Zeitschr. 51. 3 (1948), S. 346—354.

Zur Approximation und Kettenbruchentwicklung quadratischer Zahlen.

Von

Hermann Schmidt in Braunschweig.

Einleitung.

Im Folgenden wird zunächst das bekannte *Heronische Verfahren* zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln natürlicher Zahlen auf neue Art und mit scharfen Restabschätzungen im Komplexen untersucht (Satz 1) und zum Studium der Approximation *komplexer relativ-quadratischer Zahlen* durch Zahlen des Grundkörpers verwertet (Satz 2). Anschließend werden mit Kettenbruchmethoden bekannte Approximationssätze für *reelle* quadratische Irrationalzahlen verschärft (Satz 3, 4). Für den Fehler wird hier eine volle asymptotische Entwicklung angegeben.

Wir verallgemeinern ferner einen klassischen Satz über die Bestimmung der Quadratwurzeln natürlicher Zahlen, wenn die *Kettenbruchperiode abgesehen vom Schlußglied vorgeschrieben ist*, auf beliebige algebraisch-ganze reelle quadratische Zahlen (Satz 6), wobei sich merkwürdige Übergangsmöglichkeiten zwischen den zu gleichem gegebenen Periodenabschnitt unter Umständen gehörigen Entwicklungen gerader und ungerader Spur herausstellen (Satz 7). Der Fall eines aus *lauter gleichen Zahlen bestehenden* Abschnitts läßt sich vollständig durchdiskutieren (Satz 8). Satz 9 zeigt gewisse Unmöglichkeiten für die Kettenbruchentwicklung der Wurzel aus einer *Primzahl* auf.

Die Unmöglichkeit, *identisch* im ganzzahligen Parameter n *gültige* regelmäßige Kettenbruchentwicklungen für $\sqrt{n^2+h}$ zu finden, deren Teilnenner Polynome in n sind, wenn $|h| \neq 1, 2, 4$ (h ganz rational), enthält Satz 10. Die damit wohl erstmalig angeschnittene Fragestellung scheint uns nicht ohne Interesse. Zum Schluß konstruieren wir auf verschiedene Art Beispiele von Folgen quadratischer Zahlen des nämlichen Körpers, für die die *Länge der primitiven Periode* bzw. der *Vorperiode ins Unendliche* strebt (Satz 11, 12).

§ 1.

Heronische Näherungen und Kettenbrüche.

Man erzeugt bei diesem bekannten Verfahren, ausgehend von zwei positiven Zahlen a_0, b_0 mit $a_0 b_0 = D$, zwei Folgen von Näherungswerten für die positive $\sqrt{D}$ nach dem Gesetz

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + b_n),\ b_{n+1} = D : a_{n+1} \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

und findet leicht $a_n \downarrow \sqrt{D}$, $b_n \uparrow \sqrt{D}$ $(n = 1, 2, \ldots$; vgl. z. B. Kommerell [6], 5 ff., Chajoth [2]). Betrachten wir nur die a_n, so hat man

$$a_{n+1} = \tfrac{1}{2}(a_n + D/a_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Wir geben zunächst einen allgemeinen Konvergenzbeweis im Komplexen.

Sei also nunmehr $D \neq 0$, sonst beliebig komplex. Wir bilden mit dem komplexen Anfangswert $a_0 \neq 0$ die Folge (1) (soweit die a_n als endliche Zahlwerte existieren). Setzt man noch

$$a_n = \sqrt{D}\, z_n, \tag{2}$$

unter $\sqrt{D}$ einen beliebigen der möglichen Wurzelwerte verstanden, so werden die Größen z_n die Iterierten der rationalen Funktion

$$w = \tfrac{1}{2}(z + 1/z) \tag{3}$$

für $z = z_0$. Durch (3) wird jede der beiden Halbebenen $\Re z > 0$, $\Re z < 0$ auf sich abgebildet; ist also $\Re z_0 \neq 0$, so existieren alle z_n. (3) hat die Fixpunkte $+1$, -1, und indem man dies zum Ausdruck bringt, erhält man für (3) die Form

$$\frac{w-1}{w+1} = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2$$

und daher ist

$$\frac{z_n - 1}{z_n + 1} = \left(\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right)^{2^n}. \tag{4}$$

Es sei nun etwa $\Re z_0 > 0$, also

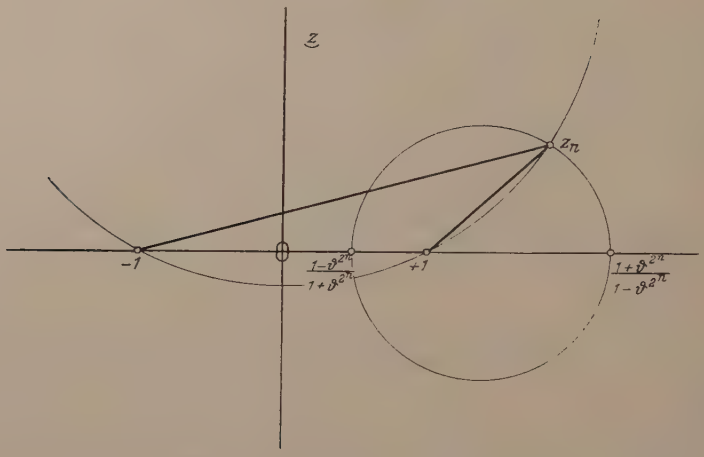
$$\left|\frac{z_0 - 1}{z_0 + 1}\right| = \vartheta < 1. \tag{5}$$

Dann gilt nach (4)

$$\left|\frac{z_n - 1}{z_n + 1}\right| = \vartheta^{2^n} \to 0,\ \lim_{n \to \infty} z_n = +1. \tag{6}$$

(6) besagt, daß z_n in der rechten Halbebene auf einem Kreise des hyperbolischen Büschels um die Punkte $+1$, -1 liegt, dessen Radius mit $1/n$ gegen Null geht. Aus den Eigenschaften des Apollonischen

Kreises folgt dann sofort (vgl. Figur)



$$|z_n - 1| \leqq \frac{1+\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}} - 1 = \frac{2\,\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}},$$

und daher nach (2) schließlich

$$|a_n - \sqrt{D}| \leqq \frac{2\,|\sqrt{D}|\,\vartheta^{2^n}}{1-\vartheta^{2^n}} \qquad (n = 0, 1, \ldots), \tag{7.1}$$

und wegen

$$|z_n| \geqq \frac{1-\vartheta^{2^n}}{1+\vartheta^{2^n}}$$

$$|b_n - \sqrt{D}| \leqq \frac{2\,|\sqrt{D}|\,\vartheta^{2^n}(1+\vartheta^{2^n})}{(1-\vartheta^{2^n})^2}. \tag{7.2}$$

Die Wahl der Wurzel ist hier bei gegebenem a_0 durch (2) festgelegt; übrigens gilt das Gleichheitszeichen, wenn $z_0 = a_0/\sqrt{D}$ reell $\geqq 1$ wird. Damit hat man

Satz 1. *Das Heronische Verfahren* (1) *konvergiert für eine beliebige komplexe Zahl* $D \neq 0$, *wenn* $\Re \frac{a_0}{\sqrt{D}} \neq 0$, *d. h. geometrisch:* a_0 *im Innern einer der beiden durch das Mittellot zu den Punkten* $\sqrt{D}$, $-\sqrt{D}$ *begrenzten Halbebenen liegt, und zwar gegen den in der gleichen Halbebene gelegenen Wert von* $\sqrt{D}$. *Für den Fehler bestehen die Abschätzungen* (7), *wo* ϑ *durch* (5) *erklärt ist* [1]).

[1]) Bestimmung der Konvergenzgebiete — aber ohne die für uns entscheidenden, an (4) anknüpfenden Entwicklungen — auch schon (sehr umständlich) bei E. Schröder, Math. Ann. 3 (1871), S. 318—320 und bei C. Schmidt, ebenda 45 (1894), S. 305—307. Den Hinweis auf diese Arbeiten verdanke ich Herrn M. Müller-Tübingen.

Aus (4) ergibt sich für die Iterierten noch die geschlossene Darstellung

$$z_n = \frac{(z_j+1)^{2^{n-j}} + (z_j-1)^{2^{n-j}}}{(z_j+1)^{2^{n-j}} - (z_j-1)^{2^{n-j}}} \qquad (0 \leqq j < n)$$

und es wird

(8) $$a_n = \sqrt{D}\,\frac{(a_j+\sqrt{D})^{2^{n-j}} + (a_j-\sqrt{D})^{2^{n-j}}}{(a_j+\sqrt{D})^{2^{n-j}} - (a_j-\sqrt{D})^{2^{n-j}}}$$ [2]).

Um nun a_n und b_n in Produktform zu schreiben, bilden wir die Quotienten $\frac{a_{\nu+1}}{a_\nu} = \frac{b_\nu}{b_{\nu+1}}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$. Mit der Abkürzung

$$A = a_0 + \sqrt{D},\ A' = a_0 - \sqrt{D}$$

liefert die Rechnung auf Grund von (8) für $j = 0$ bei $\Re(a_0/\sqrt{D}) > 0$ nach Grenzübergang $n \to \infty$

$$\sqrt{D} = a_0 \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2(AA')^{2^\nu}}{(A^{2^\nu} + A'^{2^\nu})^2}\right) = b_0 \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2(AA')^{2^\nu}}{A^{2^{\nu+1}} + A'^{2^{\nu+1}}}\right).$$

Setzt man hier $a_0 = \alpha_0/\beta_0$, wo die komplexen Zahlen α_0 und β_0 $(\neq 0)$ bei der Annahme $a_0^2 \neq D$ durch die Forderung $\alpha_0^2 - D\beta_0^2 = +1$ normiert werden können und sollen, so folgt hieraus sogleich mit

$$t = (\alpha_0 - \beta_0\sqrt{D})^2 = (\alpha_0 + \beta_0\sqrt{D})^{-2}$$

$$\sqrt{D}/a_0 = \frac{1-t}{1+t} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{(t^{2^{\nu-1}} + t^{-2^{\nu-1}})^2}\right)$$

$$\sqrt{D}/b_0 = a_0/\sqrt{D} = \frac{1+t}{1-t} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{2}{t^{2^\nu} + t^{-2^\nu}}\right).$$

Hier kann schließlich t in $0 < |t| < 1$ beliebig angenommen werden. Damit sind zwei zuerst von Ostrowski [11], 212 (8. 3) (8. 2) aufgestellte Produktformeln wiedergewonnen, und zugleich geht hervor, daß das n-te Näherungsprodukt $(n = 0, 1, \ldots)$ n-ter Näherungswert eines Heronischen Verfahrens ist (das mit $a_0 = 1$ bzw. $b_0 = 1$ beginnt); dies scheint noch nicht bemerkt worden zu sein. Dasselbe gilt dann von den beiden vermöge $q = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ hervorgehenden Produktformeln (von Engel, vgl. Perron [14] 127 (17))

$$\sqrt{\frac{q-1}{q+1}} = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{T_{2^\nu}(q)+1}\right) = 1 : \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{T_{2^\nu}(q)}\right).$$

$T_n(q)$ bedeutet hier das 1. Tschebyscheffsche Polynom, q ist nicht aus dem Intervall $-1 \leqq q \leqq +1$, sonst beliebig komplex, und die Wurzel ist mit positivem Realteil auszuziehen. Für alle diese Pro-

[2]) (8) findet sich im wesentlichen für $j = 1$ mit $a_1 = \frac{1}{2}(a_0 + b_0)$ bei Lucas [9] 507, wozu auch ebenda 310 (2) zu vergleichen.

dukte geben die Formeln (7. 1) (7. 2), worin $\sqrt{D}$ durch $\frac{1-t}{1+t}$, ϑ durch $|t|$ zu ersetzen ist, wegen des nachgewiesenen Zusammenhangs Fehlerschätzungen.

Es gehöre nunmehr D einem Ring R komplexer Zahlen an, es liege aber $\sqrt{D}$ nicht im Quotientenkörper K von R. Ferner seien p_0 und q_0 ($\neq 0$) aus R, und für den gewählten Wurzelwert sei

$$\Re \frac{p_0}{q_0\sqrt{D}} > 0, \tag{9}$$

so daß

$$\Theta = \frac{p_0 - q_0\sqrt{D}}{p_0 + q_0\sqrt{D}}$$

vom Betrag $\vartheta < 1$ wird. Dann gehören für $n = 0, 1, \ldots$ die Werte

$$\begin{cases} p_n = \frac{1}{2}\left((p_0 + q_0\sqrt{D})^{2^n} + (p_0 - q_0\sqrt{D})^{2^n}\right) \\ q_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left((p_0 + q_0\sqrt{D})^{2^n} - (p_0 - q_0\sqrt{D})^{2^n}\right) \neq 0 \end{cases} \tag{10}$$

zu R, und nach (8) für $j = 0$ wird $a_n = \frac{p_n}{q_n}$, falls $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ genommen wird. Übrigens berechnet sich rekurrent $p_{n+1} = p_n^2 + D q_n^2$, $q_{n+1} = 2 p_n q_n$. Ferner ist nach (8)

$$a_n - \sqrt{D} = (p_0 - q_0 D)^{2^n} : q_n = (p_0^2 - q_0^2 D)^{2^n}(1 - \Theta^{2^n}) : 2\sqrt{D}\, q_n^2.$$

Wird daher durch die Werte $x = p_0$, $y = q_0$ die Ungleichung

$$|x^2 - D y^2| \leqq 1 \tag{11}$$

befriedigt, so ergibt sich die Abschätzung

$$|a_n - \sqrt{D}| < \frac{1+\varepsilon}{2\,|\sqrt{D}|\,|q_n|^2} \quad (\varepsilon \text{ beliebig} > 0,\ n > N_\varepsilon). \tag{12}$$

Man hat also

Satz 2. *Gehört die komplexe Zahl D einem Ring R an, in dem die Ungleichung* (11) *durch Werte p_0, q_0 mit der Nebenbedingung* (9) *erfüllbar ist, so gibt es in R zwei Folgen p_n, q_n, für die der Quotient $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ mit der durch* (12) *beschriebenen Näherungsgüte gegen $\sqrt{D}$ strebt; und zwar liefert das Heronische Verfahren* (1) *eine solche Folge, wenn man $a_0 = \frac{p_0}{q_0}$ setzt.*

Eine umfassende Klasse von Ringen R, in denen (11), und zwar mit dem Gleichheitszeichen lösbar ist, bilden die Hauptordnungen der *imaginär-quadratischen Zahlkörper k von der Idealklassenzahl 1.* Es sei nämlich $D \in R$, quadratfrei, $K = k(\sqrt{D})$, E eine Fundamentaleinheit des biquadratischen Körpers K. Wie leicht aus der eindeutigen Primfaktorzerlegung in R folgt, ist jede ganze Zahl von K, also ins-

besondere die Einheit E von der Form $\frac{\alpha+\beta\sqrt{D}}{2}$ $(\alpha, \beta \in R)$, und für E ist $\beta \neq 0$, da sonst $\mathsf{E} \in R$, also Einheitswurzel und keine Fundamentaleinheit wäre. Die Relativnorm $\mathsf{E}\,\mathsf{E}' = \frac{\alpha^2-\beta^2 D}{4}$ ist eine Einheit von R, also vom Betrage 1. Wir zeigen nun, daß für eine geeignete Potenz $\mathsf{E}^l (l \geqq 1$, ganz) $\alpha \equiv \beta \equiv 0 \pmod{(2)}$. In der Tat sei $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix} = \mathfrak{A}$ die Darstellungsmatrix von E bezüglich der Relativbasis $(1, \sqrt{D})$ von K über k. Da E ganz ist, hat auch $2\mathfrak{A}^\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ Elemente aus R, und da E Einheit, trifft das gleiche auch für $\nu = -1, -2, \ldots$ zu. Da R mod (4) nur in endlich viele Restklassen zerfällt, muß für zwei passende Exponenten r, s $(r > s \geqq 0)$ gelten $2\mathfrak{A}^r = 2\mathfrak{A}^s + 4\mathfrak{G}$, wo die Elemente von $\mathfrak{G}$ aus R sind. Es hat also $\mathfrak{A}^{r-s} = \mathfrak{E} + \mathfrak{G} \,.\, 2\mathfrak{A}^{-s}$ ebenfalls Elemente aus R. Mit $l = r - s$ und $\mathsf{E}^l = p_0 + q_0\sqrt{D}$ ist somit der Betrag der Relativnorm $|\mathfrak{N}_k(\mathsf{E}^l)| = |p_0^2 - q_0^2 D| = 1$. Da auch E^l keine Einheitswurzel, ist $q_0 \neq 0$. Schließlich ist (9) erfüllbar; denn wäre $\frac{p_0}{q_0\sqrt{D}} = \frac{i}{\varrho}$ rein imaginär, so folgte sofort $|p_0^2| = \frac{1}{1+\varrho^2} < 1$, während doch für jede ganze Zahl ξ des imaginär-quadratischen Körpers k $|\xi|^2 = \mathfrak{N}(\xi) \geqq 1$ wird. Somit ist hier Satz 2 anwendbar[3]).

Ist R der Ring der ganzen rationalen Zahlen und $D > 0$, kein Quadrat, so ist bekanntlich stets die Gleichung $x^2 - Dy^2 = +1$ lösbar, wie man sich etwa nach dem Schubfachverfahren ohne Kettenbrüche bewiesen denke (vgl. etwa Landau [8], 57—63, oder Scholz [19], 111/12). Wegen $\Theta = \vartheta$ gilt hier sogar (12) mit $\varepsilon = 0$. Doch folgt dies einfacher unmittelbar aus der Pellschen Gleichung: ist etwa $p_0 > 0$, $q_0 > 0$ und $(p_0 + q_0\sqrt{D})^n = r_n + s_n\sqrt{D}$, so wird ja

$$0 < \frac{r_n}{s_n} - \sqrt{D} = \frac{1}{s_n(r_n + s_n\sqrt{D})} < \frac{1}{2s_n^2\sqrt{D}}.$$

Dies ist eine Verschärfung eines Teils von Satz 4 bei Perron [15], 7, wo mit Kettenbrüchen gearbeitet wird. Wir können natürlich jetzt

[3]) Die Lösbarkeit der verallgemeinerten Pellschen Gleichung $x^2 - Dy^2 =$ Einheit ist mit den (hier vermiedenen) Methoden der komplexen Kettenbrüche für den Fall des *Gaussschen Zahlkörpers* bei Arwin [0] festgestellt; auch Hurwitz [5] weist darauf hin. Bei Arwin finden sich (a. a. O. (7), S. 117) für diesen Fall auch Abschätzungen der Art (12) sowie Andeutungen über die Übertragung der Sätze auf die vier noch übrigen imaginär-quadratischen Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus (vgl. z. B. Perron [16], § 2 oder Hardy-Wright [4], 212/3, Th. 246). Unsere Schlußweise, die für den allgemeinen Fall eines imaginär-quadratischen Körpers der Klassenzahl 1 ausreicht, — es gibt ihrer mindestens neun, vgl. z. B. T. Nagel, Abh. Math. Sem. Hamburg 1 (1922) 150 — lehnt sich an einen Beweisgedanken von Minkowski an ([10], § 1, Nr. 3. 6), auf den mich Herr Bullig-Münster freundlicherweise aufmerksam gemacht hat.

auch leicht die Brücke zur Kettenbruchlehre schlagen: ist k die primitive Periodenlänge des regelmäßigen Kettenbruchs (rKB) für $\sqrt{D}$, und sind A_ν, B_ν die zugehörigen Näherungszähler und -nenner, so ist bekanntlich $x = A_{k-1}$, $y = B_{k-1}$ die positive Grundlösung von $x^2 - Dy^2 = \pm 1$, und nach einer bekannten Formel (Perron [13], 104 (7) — dieses Werk wird künftig zitiert „P“ —) wird

$$A_{mk-1} + B_{mk-1}\sqrt{D} = (A_{k-1} + \sqrt{D}\,B_{k-1})^m,$$

also nach (10) $p_n = A_{2^n k-1}$, $q_n = B_{2^n k-1}$, wenn man $p_0 = A_{k-1}$, $q_0 = B_{k-1}$ setzt [4]).

Ein *abschließendes Ergebnis* betreffend Approximationen vom Typ (12), insbesondere die Frage, wann $\varepsilon = 0$ zulässig ist, erhält man nun für *alle reellen quadratischen Irrationalzahlen* aus einer bemerkenswerten Formel von H. Scheffler ([17], 159 (6)), die lautet:

$$\frac{A_n}{B_n} = \left(\sqrt{D + (-1)^{n+1}\frac{Q_0 \cdot Q_{n+1}}{B_n^2}} + P_0\right) : Q_0. \tag{13}$$

Hierbei sind $\xi_n = (\sqrt{D} + P_n) : Q_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ die sogenannten vollständigen Quotienten zu $\xi = \xi_0$; D, $Q_n > 0$ ganz, D kein Quadrat, P_n ganz. Da (13) wenig bekannt scheint, geben wir einen einfachen Beweis mittels Matrizenrechnung. Man setze $Q_{-1} = (D - P_0^2) : Q_0$ (wie üblich, ganzzahlig normiert),

$$\mathfrak{B}_n = \begin{pmatrix} b_n & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathfrak{C}_n = \begin{pmatrix} A_{n-1}, & B_{n-1} \\ A_{n-2}, & B_{n-2} \end{pmatrix},\quad \mathfrak{P}_n = \begin{pmatrix} \cdot\, Q_n, & -P_n \\ -P_n, & -Q_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Dann gilt zunächst (mit $\tilde{\mathfrak{C}}_n = \mathfrak{C}_n$/transp.)

$$\mathfrak{C}_n\,\mathfrak{P}_0\,\tilde{\mathfrak{C}}_n = (-1)^n\,\mathfrak{P}_n. \tag{13.1}$$

In der Tat ist dies wegen $\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{E} =$ Einheitsmatrix für $n = 0$ selbstverständlich. Anderseits ist $\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{C}_n = \mathfrak{C}_{n+1}$ und $\mathfrak{B}_n\,\mathfrak{P}_n\,\tilde{\mathfrak{B}}_n = -\mathfrak{P}_{n+1}$ nach bekannten Kettenbruchformeln (vgl. z. B. P 74 unten in sinngemäßer Übertragung auf die höheren Indizes), und hieraus folgt sofort (13.1) durch Induktion. Setzt man jetzt für Q_{-1} seinen Wert ein und ersetzt man in (13.1) (1. Komponente) n durch $n+1$, so folgt (13) durch Auflösung nach $A_n : B_n$. Durch Entwicklung in die binomische Reihe ergibt sich nun für $\frac{Q_0\,Q_{n+1}}{B_n^2} < 1$, das heißt aber, wegen der Periodizität und damit Beschränktheit der Folge Q_n, für alle hinreichend großen n

$$\frac{A_n}{B_n} - \xi = \frac{(-1)^{n+1}\,Q_{n+1}}{2\sqrt{D}\,B_n^2} - \frac{Q_0\,Q_{n+1}^2}{8\sqrt{D^3}\,B_n^4} + \sum_{\nu=3}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{\nu}\frac{(-1)^{\nu(n+1)}\,Q_0^{\nu-1}\,Q_{n+1}^{\nu}}{D^{\nu-\frac{1}{2}}\,B_n^{2\nu}}. \tag{13.2}$$

[4]) In dieser Richtung weisen auch die Formeln Lucas [9], 457 im Vergleich mit 507; doch fehlt dort die Angabe des genauen Zusammenhangs (wann sich nämlich die Heronischen auf Kettenbruch-Näherungen reduzieren).

Für gerade $n+1$ steht rechts eine alternierende Leibnizsche Reihe, während für ungerade $n+1$ rechts alle Glieder negativ sind. Wir setzen nun mit Perron [15], § 1 $M(\xi) = \overline{\text{fin}}\, c$, wo c in der Menge derjenigen positiven Zahlen variiert, zu denen es eine Folge rationaler Brüche $\frac{p_m}{q_m}$ mit $|\xi - \frac{p_m}{q_m}| < \frac{1}{c\, q_m^2}$ gibt. Wegen $M(\xi) > 2$ braucht man nur *Kettenbruch*näherungen $A_n : B_n$ zu betrachten, und daher ergibt sich sofort die bekannte Formel (Perron [15], Satz 3)

$$M(\xi) = \frac{2\sqrt{D}}{Q_{\bar{\mu}}}, \text{ wo } Q_{\bar{\mu}} = \min_{n_0 \leqq n \leqq n_0 + k - 1} Q_n,$$

wenn bei $n = n_0 + 1$ eine Periode der Länge k beginnt.

Bei dieser Formulierung ist benützt, daß die Periode der Q_n um eine Nummer früher beginnt als diejenige der P_n und der Teilnenner b_n. Daraus folgt z. B. für $P_0 = 0$, d. h. für die Wurzel aus einer Rationalzahl: $M(\xi) \geqq 2\xi$. So ist $M(\sqrt{\frac{3}{2}}) = M(\sqrt{6}) = 2\sqrt{6} = 4\sqrt{\frac{3}{2}})$.

Allgemein aber ergibt sich: genau dann, wenn in der Form

$$n + 1 = \bar{\mu} + \lambda k \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots) \tag{13.3}$$

unendlich viele *gerade* Zahlen enthalten sind, d. h. also, wenn entweder $k \equiv 1\,(2)$ oder aber für ein $\bar{\mu}$

$$\mu \equiv k \equiv 0\,(2)$$

ist, kann der Betrag des Fehlers $|\xi - \frac{A_n}{B_n}|$ für unendlich viele n kleiner als $\frac{1}{M(\xi) B_n^2}$ gemacht werden. Man hat also schließlich

Satz 3. *Für eine beliebige reelle quadratische Irrationalzahl (positiver Differente) gibt es dann und nur dann eine unendliche Folge rationaler Näherungen $\frac{p_m}{q_m}$ mit einem Fehler vom Betrag $< \frac{1}{M(\xi) q_m^2}$, wenn entweder die primitive Periode k des regelmäßigen Kettenbruchs für ξ ungerade ist, oder bei geradem k das Minimum der zu einer Periode gehörigen unter den bei* (13) *erklärten Zahlen Q_n für einen geraden Index angenommen wird. Beide Male erhält man solche, und zwar obere Näherungen aus der rKB-Entwicklung für die geraden $n+1$ der Gestalt* (13.3).

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß die (konvergente) Reihe (13.2) zugleich eine *asymptotische Entwicklung des Fehlers* für $n \to \infty$ nach Potenzen von B_n^{-2} mit noch von n abhängigen, periodischen Koeffizienten vorstellt. Für $Q_0 = 1$, somit $\bar{\mu} = 0$ geht wieder der betreffende *Sonderfall von Satz 2* (mit erweiterter Folge von Näherungen) hervor. Hierzu noch folgendes *Gegenstück:*

Satz 4. *Ist $\xi = \sqrt{D} + \frac{1}{2}$ ($D > 0$ rational) eine ganze quadratische Zahl, so ist $M(\xi) = 2\sqrt{D}$; und für unendlich viele der zugehörigen Näherungskettenbrüche $\frac{A_n}{B_n}$ wird $0 < \frac{A_n}{B_n} - \xi < \frac{1}{2\sqrt{D}\, B_n^2}$.*

Beweis. Da ξ ganz ist, ist $\sqrt{D}$ von der Form $\frac{q\sqrt{\Delta}}{2}$ mit $\Delta \equiv 1(4)$, $q \equiv 1(2)$. Es ist also $M(\xi) = \frac{2\sqrt{q^2\Delta}}{Q_\mu}$, wenn Q_u die gleiche Bedeutung wie in Satz 3 hat, worin aber jetzt $q^2\Delta$ statt D zu setzen ist. Nach P 74—75 werden in den Darstellungen $\xi_u = (\sqrt{q^2\Delta} + P_\mu) : Q_\mu$ alle Q_μ ganz, da ja $q^2\Delta - P_0^2 \equiv 0(2)$ ist. Nun ist aber stets $Q_u \neq 1$; denn zu äquivalenten Zahlen gehört die gleiche Diskriminante der entsprechenden primitiven ganzzahligen quadratischen Gleichung, diese Diskriminante ist aber $q^2\Delta$ für ξ und $4q^2\Delta$ für $q\sqrt{\Delta} + P_\mu$. Also ist Min $Q_\mu = 2$, $\bar{\mu} = 0$. Damit folgt die Behauptung aus Satz 3. — Übrigens erschließt man ähnlich, daß hier sämtliche Q_μ gerade ausfallen.

§ 2.

Quadratische Zahlen mit vorgeschriebenem symmetrischem Periodenabschnitt.

Mit σ_l bezeichnen wir einen symmetrischen Komplex von l natürlicher Zahlen, d. h. ein System (b_λ) von solchen $(\lambda = 1, 2, \ldots, l)$, bei dem $b_{l+1-\lambda} = b_\lambda$. Über regelmäßige Kettenbrüche, deren Periode (in naheliegender Schreibweise) die Form $\overline{\sigma_{k-1}, b_k}$ besitzt, ist folgender Satz im wesentlichen bekannt:

Satz 5. *Der regelmäßige Kettenbruch für die quadratische Zahl* $\xi = \sqrt{D} + \frac{S}{2}$ *(D, S rational, D positiv und nicht Quadrat einer Rationalzahl) ist dann und nur dann von der Gestalt*

$$\xi = b_0, \overline{\sigma_{k-1}, b_k}, \tag{14}$$

wenn

$$a)\ S \text{ ganzzahlig}, \quad b)\ \sqrt{D} > 1 \text{ bzw. } \sqrt{D} > \tfrac{1}{2}, \tag{15}$$

je nachdem die Spur S gerade oder ungerade ist. Für einen solchen rKB ist stets

$$b_k = -S + 2b_0. \tag{15'}$$

Der Beweis ist leicht z. B. mittels eines bekannten Galoisschen Satzes (P § 23) zu führen; für den geläufigsten Fall $S = 0$ vgl. z. B. P 87—88, für den allgemeinen Kraitschik [7], 18 und 61—62 sowie Dörrie [3], § 49, insbes. 213 (nur unwesentlich spezieller als unsere Formulierung). Wir haben an anderer Stelle (Herm. Schmidt [18]) uns unter anderem damit beschäftigt, zu gegebener Diskriminante d alle Zahlklassen aufzustellen, die einen Vertreter dieser Art enthalten. Hier lenken wir unser Augenmerk nun speziell auf die *ganzen* quadratischen Zahlen und bemerken vorweg:

Genau dann hat eine ganze quadratische Zahl ω *eine rKB-Entwicklung der Gestalt* (14), *wenn ihre Differente* $\omega - \omega'$ *positiv ist.*

Denn ist Δ ganz, positiv und quadratfrei, so sind bekanntlich die ganzen Zahlen des Körpers $P_0(\sqrt{\Delta})$ (P_0 der rationale Zahlkörper) die Zahlen $r\sqrt{\Delta} + s$, wo

$$r,\ s \text{ beliebig ganz rational für } \Delta \equiv 2 \text{ oder } 3 \quad (4)$$
$$2r,\ 2s \text{ ganz rational, } 2r \equiv 2s \quad (2) \text{ für } \Delta \equiv 1 \quad (4).$$

Demnach kommt die Bedingung (15) b) ersichtlich für *ganze* Zahlen einfach auf $r > 0$ hinaus. — Da offenbar jede ganze quadratische Zahl einer solchen mit positiver Differente äquivalent ist, folgt daß jede *ganze* quadratische Zahl eine rKB-Periode der Form σ_{k-1}, b_k besitzt.

Wir wollen uns nun σ_{k-1} beliebig vorgeben und b_0, b_k in allgemeinster Weise so hinzubestimmen, daß (14) eine ganze quadratische Zahl wird. Fordert man noch b_k gerade, so wird die Lösung — wenn eine solche vorhanden ist — mod 1 kongruent der Wurzel aus einer natürlichen Zahl, und man kommt auf einen klassischen Satz von Euler und Muir zurück (P 98, Satz 17). Wir behandeln den allgemeinen Fall. Zunächst findet man sofort, daß die gesuchte Zahl ω der quadratischen Gleichung genügen muß

$$B_{k-1}t^2 + (B_k - b_0 B_{k-1} - A_{k-1})\,t - (A_k - b_0 A_{k-1}) = 0, \tag{16}$$

wonach

$$\begin{cases} B_k - b_0 B_{k-1} - A_{k-1} = -S B_{k-1} \\ A_k - b_0 A_{k-1} = -N B_{k-1}, \end{cases} \tag{17}$$

wenn wir noch die Norm von ω mit N bezeichnen. Wegen der Symmetrie von σ_{k-1} ist nun S nach Satz 5 für beliebige b_0, b_k ganzzahlig; wir haben also nur die Bedingung: N *ganz* zu erfüllen, oder also die Kongruenz

$$A_k - b_0 A_{k-1} \equiv 0 \ (B_{k-1}). \tag{18}$$

Es seien

$$\Lambda_\nu,\ \mathsf{M}_\nu \tag{19}$$

die Näherungszähler bzw. -nenner für den endlichen Kettenbruch

$$[b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_2,\ b_1] \quad (\nu = -2,\ -1,\ 0,1,\ \ldots,\ k-2;\ k \geqq 1),$$

also gegebene Zahlen. Es ist bekanntlich wegen der Symmetrie $\mathsf{M}_{k-2} = \Lambda_{k-3}$ ferner

$$\frac{A_\nu}{B_\nu} = b_0 + \frac{\mathsf{M}_{\nu-1}}{\Lambda_{\nu-1}} \quad (\nu \geqq 0),$$

woraus insbesondere (da zusammengehörige Näherungszähler und -nenner teilerfremd sind) folgt $B_{k-1} = \Lambda_{k-2}$ und

$$\begin{aligned} A_{k-1} &= b_0 \Lambda_{k-2} + \mathsf{M}_{k-2} \\ A_{k-2} &= b_0 \Lambda_{k-3} + \mathsf{M}_{k-3}. \end{aligned} \tag{20}$$

Wegen $A_k = b_k A_{k-1} + A_{k-2}$ ergibt sich durch Einsetzen von (20)

$$A_k - b_0 A_{k-1} = (b_k - b_0)\, b_0 \Lambda_{k-2} + b_k \mathsf{M}_{k-2} + \mathsf{M}_{k-3}, \tag{21}$$

demnach als gleichwertig mit (18) die *lineare* Kongruenz für b_k:

$$b_k \mathsf{M}_{k-2} + \mathsf{M}_{k-3} \equiv 0 \ (\Lambda_{k-2})$$

als deren Lösung durch Multiplikation mit $(-1)^k \Lambda_{k-3}$ sofort hervorgeht

$$\boxed{b_k = (-1)^{k-1} \Lambda_{k-3} \mathsf{M}_{k-3} + m \Lambda_{k-2}.} \tag{22}$$

Hier ist m eine willkürliche ganze rationale Zahl. Man hat also

Satz 6. *Damit ein rKB eine ganze quadratische Zahl ω positiver Differente darstelle, ist notwendig und hinreichend, daß auf eine eingliedrige Vorperiode eine Periode vom Typ σ_{k-1}, b_k folge, in der sich das Schlußglied b_k entsprechend* (22) *durch die Glieder des symmetrischen Teils ausdrückt (zur Bezeichnung s.* (19)*).*

Wünscht man mit Hilfe dieses Satzes bei gegebenen $b_\lambda\,(1 \leqq \lambda \leqq k-1)$ alle zugehörigen ganzen quadratischen Zahlen nebst ihren KBr-Entwicklungen aufzustellen, so ist zunächst in (22) die ganze Zahl m so zu beschränken, daß $b_k > 0$ ausfällt, was wegen $\Lambda_{k-2} > 0$ für alle hinreichend großen m zutrifft. Dann ist nach (15′) die ganze Zahl $S \equiv b_k\,(2)$ sonst beliebig auszuwählen, und dann $b_0 = (b_k + S) : 2$ zu nehmen. Insbesondere erhält man für

$\underline{S = b_k}$ $\quad b_0 = b_k$, d. h. einen reinperiodischen rKB (ω ganz und reduziert),

und für

$\underline{b_k \text{ gerade und } S = 0}$: $b_0 = b_k/2$; $\omega = \sqrt{D}$; D ganz,

b_k ungerade, $S = 1$: $b_0 = (b_k + 1)/2$; $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{D}$; $4D$ ganz, $\equiv 1\,(4)$.

Schließlich ist nach (17), (21), (22), (15′)

$$D = S^2/4 - N = \frac{S^2}{4} + (b_k - b_0)\, b_0 + ((-1)^{k-1} \mathsf{M}_{k-2} \Lambda_{k-3} + 1) \frac{\mathsf{M}_{k-3}}{\Lambda_{k-2}} + m \mathsf{M}_{k-2},$$

oder also

$$\boxed{D = \frac{b_k^2}{4} + (-1)^{k-1} \mathsf{M}_{k-3}^2 + m \Lambda_{k-3}} \tag{23}$$

ein quadratisches Polynom in m (nach (22)).

Ist nun Λ_{k-2} gerade, so hat b_k nach (22) für alle m den nämlichen Geradheitscharakter; das gegebene Periodenstück σ_{k-1} kommt also nur bei Zahlen $\equiv \sqrt{D}$ (mod 1), D ganz, oder aber nur bei Zahlen $\equiv \sqrt{D} + 1/2$ (mod 1), $4D \equiv 1\,(4)$ vor, je nachdem das Produkt $\Lambda_{k-3} \mathsf{M}_{k-3}$ gerade oder ungerade ist. Der (für $2b_0$ statt b_k) nach P a. a. O. von Muir ausgeschlossene Fall, daß die rechte Seite von (22) ungerade wird, führt eben auf die ganzen Zahlen der zweiten Sorte.

Für Λ_{k-2} ungerade aber wechselt der Geradheitscharakter von b_k mit m. Es wird $b_k \equiv \Lambda_{k-3} M_{k-3} + m \pmod 2$; σ_{k-1} kommt bei Zahlen mit $S \equiv 0$ *und* $S \equiv 1$ vor.

Geht man nun von einem bestimmten zulässigen Wert m aus, und verschiebt ihn dann um ganze Zahlen, so erhält man

Satz 7. *Hat man den rKB für irgend eine ganze quadratische Zahl* $\omega = \lfloor \sqrt{D} + S/2$ *positiver Differente, so erhält man alle übrigen* $\omega' = \lfloor \sqrt{D} + S'/2$ *mit gleichem symmetrischem Periodenteil durch die Transformationen*

$$b_k' = b_k + \lambda \Lambda_{k-2}$$

$$D' = D + \frac{b_k'^2 - b_k^2}{4} + \lambda \Lambda_{k-3} = D + \frac{1}{4}(2 b_k + \lambda \Lambda_{k-2}) \lambda \Lambda_{k-2} + \lambda \Lambda_{k-3}$$

$$S' \equiv b_k'(2), \quad b_0' = \frac{b_k' + S'}{2}.$$

Hierin durchläuft λ alle ganzen rationalen Zahlen $> -\frac{b_k}{\Lambda_{k-2}}$. Für gerades Λ_{k-2} wird stets $S' \equiv S \equiv b_k(2)$, für ungerades Λ_{k-2} wird $S' \equiv S + \lambda(2)$.

Es ist zu betonen, daß zur Benutzung dieses Satzes die Kenntnis des Wertes von m in den Formeln (22), (23) für das gegebene ω nicht erforderlich ist. Besonders bemerkenswert erscheint der im letzten Falle mögliche Übergang von Entwicklungen gerader zu solchen ungerader Spur (λ ungerade). So kann eine Tafel der rKB für $\sqrt{D}$ (D ganz > 0), wie etwa die Patzsche [12] auch zur Gewinnung von Entwicklungen dieser letzteren Art dienen (Beispiel:

$$\sqrt{629} = 25, \overline{12, 1, 1, 1, 12, 50}; \quad k = 5, \Lambda_{k-2} = 313; \quad \lambda = 1$$

$$\tfrac{1}{2}(\sqrt{131\,885} + 1) = 182, \overline{12, 1, 1, 12, 363}).$$

Freilich erhält man so nicht die den Fällen Λ_{k-2} gerade, $\Lambda_{k-3} M_{k-3}$ ungerade entsprechenden Entwicklungen. Eine Tafel der rKB für die ganzen Zahlen $\lfloor D + 1/2$, wo $4D \equiv 1\,(4)$, die zahlentheoretisch den Wurzeln aus ganzen rationalen Zahlen durchaus gleichstehen, wäre jedenfalls wünschenswert und die Berechnung könnte durch obige Bemerkung erleichtert bzw. kontrolliert werden; eine Tafel für $D < 100$ bei Kraitchik [5], 68—70.

Schließlich sei noch erwähnt, daß mit Hilfe der folgenden Formeln (P 34 (7), 37 (11) (12) (13), 36 (10) (9.)

$$\Lambda_{k-2} = \begin{cases} \Lambda_{l-1}^2 + \Lambda_l^2 \\ \Lambda_{l-1}(\Lambda_{l-2} + \Lambda_l) \end{cases} \quad \Lambda_{k-3} = \begin{cases} \Lambda_{l-1} M_{l-1} + \Lambda_l M_l \\ \Lambda_{l-1} M_l + \Lambda_{l-2} M_{l-1} \end{cases}$$

(24)

$$M_{k-3} = \begin{cases} M_{l-1}^2 + M_l^2 \\ M_{l-1}(M_{l-2} + M_l) \end{cases} \quad k = \begin{cases} 2l+3 \\ 2l+2 \end{cases}$$

sich die Berechnung der in Satz 6.7 benötigten Größen unter Um-

ständen vereinfacht. Insbesondere wird durch die hieraus noch fließenden Kongruenzen mod 2

$$\Lambda_{k-2} \equiv \begin{cases} (b_{l+1}+1)\,\Lambda_{l-1} + \Lambda_{l-2} \\ b_{l+1}\,\Lambda_{l-1} \end{cases} \quad \mathsf{M}_{k-3} \equiv \begin{cases} (b_{l+1}+1)\,\mathsf{M}_{l-1} + \mathsf{M}_{l-2} \\ b_{l+1}\,\mathsf{M}_{l-1} \end{cases} \Bigg| \; k = \begin{cases} 2l+3 \\ 2l+2 \end{cases}$$

die Entscheidung über die bestehenden Möglichkeiten (S gerade oder ungerade) vor und bei Satz 7 erleichtert.

Bei dieser Gelegenheit sei eine kurze Herleitung der *allgemeinen* Formeln eingeschaltet, mit deren Hilfe sich bei einem (endlichen) *symmetrischen rKB* (der Gliederzahl $q+1$) die Näherungszähler und Nenner A_ν, B_ν für $\nu > q/2$ vermöge der A_ν, B_ν mit $\nu \leqq q/2$ ausdrücken lassen. Es sei zunächst $q = 2k+1$ ungerade und also

$$b_\nu = b_{2k+1-\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2k+1). \tag{25}$$

A_ν und B_ν genügen der Differenzengleichung

$$u_\nu = b_\nu u_{\nu-1} + u_{\nu-2} \tag{26}$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{pmatrix} B_{-2} & B_{-1} \\ A_{-2} & A_{-1} \end{pmatrix} = E = \text{Einheitsmatrix}. \tag{27}$$

Wegen (25) ist nun hier auch $u_{2k+1-\nu} = b_\nu u_{2k-\nu} + u_{2k-\nu-1}$. Schreibt man $v_\nu = (-1)^\nu u_{2k-1-\nu}$, so folgt $v_\nu = b_\nu v_{\nu-1} + v_{\nu-2}$, d. h. die v_ν erfüllen ebenfalls (26). Demnach gibt es eine von ν unabhängige Matrix $\mathfrak{Q}$ derart, daß

$$(-1)^\nu \begin{pmatrix} B_{2k+1-\nu}, & -B_{2k-\nu} \\ A_{2k+1-\nu}, & -A_{2k-\nu} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} B_{\nu-2} & B_{\nu-1} \\ A_{\nu-2} & A_{\nu-1} \end{pmatrix}.$$

Indem man $\nu = k+1$ setzt, erhält man hieraus sofort

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} B_k, & -B_{k-1} \\ A_k, & -A_{k-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_k, & -B_k \\ -A_{k-1}, & B_{k-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_k\,B_{k-1} + A_k B_k; & -(B_{k-1}^2 + B_k^2) \\ A_{k-1}^2 + A_k^2; & -(A_{k-1}B_{k-1} + A_k B_k) \end{pmatrix},$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Für $\nu = 0$ gehen insbesondere mit Rücksicht auf (27) die bei (24) benutzten (SERRETschen) Formeln hervor. Ferner erhält man auf die gleiche Weise im Falle $q = 2k$ gerade

$$(-1)^\nu \begin{pmatrix} B_{2k-\nu}, & -B_{2k-\nu-1} \\ A_{2k-\nu}, & -A_{2k-\nu-1} \end{pmatrix} = \mathfrak{Q} \begin{pmatrix} B_{\nu-2} & B_{\nu-1} \\ A_{\nu-2} & A_{\nu-1} \end{pmatrix},$$

wo jetzt

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} A_{k-1}B_k + A_{k-2}B_{k-1} & -B_{k-1}(B_{k-2}+B_k) \\ A_{k-1}(A_{k-2}+A_k) & -(A_{k-1}B_{k-2} + A_k B_{k-1}) \end{pmatrix}.$$

Wir wollen nun, ohne auf die Rechnung einzugehen, die *Formeln zu Satz 6 für* $k = 1, 2, 3, 4$, und $S = 0$ bzw. $S = 1$ übersichtlich und in für die Anwendung bequemer Form zusammenstellen, wobei wir des Vergleichs halber und zur Erläuterung von Satz 7 auch die bekannten Ergebnisse für $S = 0$ (vgl. P 99—100) in entsprechender Bezeichnung mitaufführen.

	$k=1$	$k=2$	$k=3$
D	n^2+1	n^2+m (m/2n)	$n^2+1+2ln(4n^2+3)+l^2(4n^2+1)^2$
$\sqrt{D}$	$n, \overline{2n}$	$n, \overline{\frac{2n}{m}, 2n}$ (m/2n)	$n+l(4n^2+1), \overline{2n, 2n, 2n+2l(4n^2+1)}$
Λ_{k-2}	1	$\frac{2n}{m}$	$4n^2+1$
Λ_{k-3}	0	1	$2n$
D'	$n(n-1)+\frac{5}{4}$	$(n-\frac{1}{2})^2+m$ m/(2n−1)	$n^2+1+(2l+1)n(4n^2+3)+(l+\frac{1}{2})^2(4n^2+1)^2$
$\sqrt{D'}+\frac{1}{2}$	$n, \overline{2n-1}$	$n, \overline{\frac{2n-1}{m}, 2n-1}$ m/(2n−1)	$n+\frac{1}{2}+(l+\frac{1}{2})(4n^2+1), \overline{2n, 2n, 2n+(2l+1)(4n^2+1)}$
Λ_{k-2}	1	$\frac{2n-1}{m}$	$4n^2+1$
Λ_{k-3}	0	1	$2n$

$n\geqq 1, m\geqq 1$	D''	$n(n-1)+\frac{5}{4}+2l(2n-1)(n(n-1)+1)+l^2(2n(n-1)+1)^2$
$l\geqq 0$	$\sqrt{D''}+\frac{1}{2}$	$n+l(2n(n-1)+1), \overline{2n-1, 2n-1, 2n-1+2l(2n(n-1)+1)}$
	Λ_{k-2}	$(2n-1)^2+1$
$k=4$	Λ_{k-3}	$2n-1$

$4D$ $\quad m^2b_1^2(c+1)^2-2mc(c^2-3)+b_2^2(c^2-4)$ $\quad b_1\geqq 1, b_2\geqq 1, c=b_1b_2+1, m>\frac{b_2c}{b_1(c+1)}$

$\Lambda_{k-2}=b_1(c+1),\ \Lambda_{k-3}=c$

1) $b_1=b$ bel., $b_2=2n$

$\sqrt{D}$ $\quad mb\frac{c+1}{2}-nc, \overline{b, 2n, b, mb(c+1)-2nc}$

2) $b_1=2h,\ b_2=2n-1$

$\sqrt{D}+\frac{1}{2}$ $\quad mh(c+1)-\frac{2n-1}{2}c+\frac{1}{2}, \overline{2h, 2n-1, 2h, 2mh(c+1)-(2n-1)c}$

3) $b_1=2h-1,\ b_2=2n-1$

$\sqrt{D}$ $\quad \frac{1}{2}(m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c), \overline{2h-1, 2n-1, 2h-1, m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c}$ m gerade

$\sqrt{D'}+\frac{1}{2}$ $\quad \frac{1}{2}(m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c+1), \overline{2h-1, 2n-1, 2h-1, m(2h-1)(c+1)-(2n-1)c}$ m ungerade

Für $k = 1, 3$ gehen die D und D' entsprechenden Entwicklungen, ebenso für $k = 4$ die beiden Fälle 3) entsprechend Satz 7 ineinander über. Dagegen stehen die Fälle $k = 3$, D'' und $k = 4$, 1) und 2) je für sich. Für $k = 2$ ist der Übergang ausführbar, wenn $b_1 = \frac{2n}{m}$ bzw. $\frac{2n-1}{m}$ ungerade ist.

Als weiteres Beispiel wollen wir alle ganzen quadratischen Zahlen positiver Differente bestimmen, deren *symmetrischer Periodenteil aus lauter gleichen Zahlen* c besteht. Einen solchen rKB schreiben wir abgekürzt $b_0, \overline{(c)^{k-1}}, b_k\,(k \geqq 2)$. In (19) wird jetzt

$$\Lambda_\nu = f_{\nu+2}, \quad \mathsf{M}_\nu = f_{\nu+1} \qquad (\nu \geqq -2), \tag{31}$$

wenn die ganzen Zahlen $f_\nu = f_\nu(c)$ für alle ganzen ν durch die Stufenformel

$$f_{\nu+2} = c f_{\nu+1} + f_\nu \quad \text{mit} \quad f_0 = 0,\ f_1 = 1 \tag{32}$$

bestimmt werden. Es sind $f_\nu(1)$ die Fibonaccischen Zahlen, $f_\nu(2)$ die von Lucas so genannten Pellschen Zahlen ($\nu \geqq 0$); allgemein findet man die Eigenschaften der f_ν z. B. bei Bessel-Hagen [1] (künftig zitiert „B“) 1562 ff. zusammengestellt (wo $q = -1$ zu nehmen); vgl. auch Lucas [9], Kap. XVIII, 308 ff.

Nach (22), (23) wird nun

$$b_k = (-1)^{k-1} f_{k-1} f_{k-2} + m f_k, \quad D = \frac{b_k^2}{4} + (-1)^{k-1} f_{k-2}^2 + m f_{k-1}.$$

Für einen gewissen Wert $m = m_0$ wird $b_k = c$ werden, da dieser Wert für jedes k eine (triviale) Lösung der Aufgabe vorstellt (es ist

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{c^2+4} + S\right) = \frac{c+S}{2}, \quad \overline{c} \text{ für } S \equiv c\,(2)).$$

Man findet

$$m_0 = \frac{c + (-1)^k f_{k-1} f_{k-2}}{f_k} = (-1)^k (f_{k-1} - c f_{k-2}) = (-1)^k f_{k-3}, \tag{33}$$

wie man vermöge (32) und der (aus (31) oder B 1565 (11) zu entnehmenden) Formel

$$f_{k-1}^2 - f_k f_{k-2} = (-1)^k \tag{34}$$

sieht. Setzt man noch $m = m_0 + n$, so wird

$$b_k = c + n f_k, \tag{35}$$

wo jetzt wegen $f_k \geqq c$ $(k \geqq 2)$ $n \geqq 0$ ist, und es wird mit der Bezeichnung $C = c^2 + 4$ wegen (33), (34)

$$D = \frac{(c + n f_k)^2}{4} + n f_{k-1} + 1,$$

oder also

$$4D = f_k^2 n^2 + 2 g_k n + C, \tag{36}$$

wenn man noch (vgl. B 1564 (4))

$$g_\nu = c f_\nu + 2 f_{\nu-1} \tag{37}$$

setzt.

Für $k = 2l$ *gerade* läßt sich dieser Ausdruck noch vereinfachen; es gelten nämlich die Verdopplungsformeln (B 1565 (13), (14))

$$f_{2l} = f_l g_l, \quad 2 g_{2l} = g_l^2 + C f_l^2. \tag{38}$$

Dadurch entsteht die bemerkenswerte Zerlegung

$$4 D = (f_l^2 n + 1)(g_l^2 n + C). \tag{39}$$

Für die Diskriminante von (36) gilt übrigens allgemein (B 1565 12))

$$g_k^2 - C f_k^2 = 4 (-1)^k, \tag{40}$$

so daß (36) als Polynom in n für *ungerade* $k = 2l + 1$ über P_0 irreduzibel ist; man kann es dann noch in die Gestalt setzen

$$4 D = [(f_{l+1}^2 - f_l^2) n + c]^2 + [2 f_l f_{l+1} n + 2]^2. \tag{41}$$

Hierbei wurde Gebrauch gemacht von der aus (31) und der 1. Beziehung (24) fließenden Formel

$$f_{2l+1} = f_l^2 + f_{l+1}^2$$

(auch aus B 1565 (13), 3. Formel für $m = n + 1$), sowie der dann aus (37) für $\nu = 2l + 1$ vermöge (38) und (32) hervorgehenden weiteren Beziehung

$$g_{2l+1} = c(f_{l+1}^2 - f_l^2) + 4 f_l f_{l+1}.$$

Es läßt sich nun ein vollständiger Überblick darüber gewinnen, wann eine Entwicklung mit gerader oder ungerader Spur zustandekommt. Sei

I. c gerade. Dann ist nach (32)

$$f_{\nu+2} \equiv f_\nu, \ (2), \text{ also } f_k \equiv k \ (2).$$

Nach (35) ist also für

1) $k \equiv 0 \ (2) \quad b_k \equiv 0 \ (2), \quad n$ beliebig

2) $k \equiv 1 \ (2) \quad b_k \equiv n \ (2).$

Anders im Falle

II. c ungerade. Jetzt wird $f_\nu(c) \equiv f_\nu(1), \ (2)$. Nun ist, wie sofort zu sehen,

1) $f_k(1) \equiv 0 \ (2)$ für $k \equiv 0 \ (3)$ und dann $b_k \equiv 1 \ (2), \ n$ beliebig

2) $f_k(1) \equiv 1 \ (2)$ für $k \not\equiv 0 \ (3), \quad b_k \equiv n + 1, \ (2).$

Wir fassen zusammen in

Satz 8. *Alle ganzen quadratischen Zahlen positiver Differente, für die die Glieder des symmetrischen Teils der KBr-Periode einander gleich und zwar gleich c sind, erhält man durch die Formel*

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{f_k^2 n^2 + 2 g_k n + c^2 + 4} + S\right) = \frac{c + n f_k + S}{2}, \overline{(c)^{k-1}, c + n f_k}.$$

Hier bedeuten alle Buchstaben ganze Zahlen, es ist $n \geqq 0$, $c \geqq 1$, $k \geqq 1$ *und* $S \equiv c + n f_k$, (2) *zu nehmen;* f_k, g_k *sind durch* (32) *und* (37) *erklärt. — Sind c und k gerade, so auch S; ist c ungerade, k durch 3 teilbar, so ist S ungerade. In den anderen Fällen entstehen je zwei Reihen von Entwicklungen, die nach Satz 7 ineinander überführbar sind.*

Aus (36) folgt noch für die *Anzahl N* der fraglichen Zahlen mit dem symmetrischen Periodenabschnitt $(c)^{k-1}$, für die $D \leqq x$ und die Spur 0 oder 1 ist

$$N = \left[\frac{2}{f_k}\sqrt{x + \frac{(-1)^k}{f_k^2}} - \frac{g_k}{f_k^2}\right] \sim \frac{2\sqrt{x}}{f_k} - \frac{g_k}{f_k^2}.$$

Hierbei sind die trivialen Entwicklungen mit $b_k = c$ nicht mitgezählt, und der Fehler in der asymptotischen Darstellung ist vom Betrag $\leqq 1$; diese Unsicherheit um eine Einheit würde sich wegen der Unstetigkeit der Funktion $[y]$ auch nicht durch Berücksichtigung von mehr Gliedern in der Reihenentwicklung der Quadratwurzel beseitigen lassen.

Beispiele. Für $c = 2$, $k = 6$, $x = 10^4$ wird $N = 2$; die Zahlen sind

$$\sqrt{326} = 36, \overline{(2)^5, 72}, \quad \sqrt{5100} = 71, \overline{(2)^5, 142}.$$

Für $c = 1$, $k = 12$, $x = 10^4$ wird $N = 1$; $4D = (f_6^2 + 1)(g_6^2 + 5)$

$$\tfrac{1}{2}\left(\sqrt{5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 47} + 1\right) = \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{21385} + 1\right) = 73, \overline{(1)^{11}, 145}.$$

Es sei noch eine Feststellung angeschlossen, die sich aus der Tatsache ergibt, daß für gerades k das Polynom (36) nach (39) in zwei ganzzahlige Linearfaktoren zerfällt.

Satz 9. *Ist p eine Primzahl* $\neq 7$ *und nicht von der Form* $c^2 + 2$, *so hat* $\sqrt{p}$ *nie eine rKB-Entwicklung der Form*

$$b_0, \overline{(c)^{2l-1}, b_{2l}} \quad (l \geqq 1, b_{2l} \neq c).$$

Beweis. In letzterem Falle läßt sich nämlich nach Satz 8 und (39) schreiben

$$4p = (f_l^2(c)\, n + 1)(g_l^2(c)\, n + c^2 + 4),$$

$n = 0$ führt auf eine eingliedrige Periode, kommt also nicht in Frage. Da der rechte Faktor rechts > 4 ist, kann der linke nur 2 oder 4 sein. Im ersten Falle ist $f_l^2(c) \cdot n = 1$, $n = f_l(c) = 1$, also entweder $l = 1$, c beliebig, $g_1(c) = c$ (nach (37)), $p = c^2 + 2$, mit $\sqrt{c^2 + 2} = c, \overline{c, 2c}$; oder aber $l = 2$, $c = 1$, $g_2(1) = 3$, $p = 7$, $\sqrt{7} = 1, \overline{1, 1, 1, 4}$, was wir beides ausgeschlossen hatten. Im zweiten Falle ist $f_l^2(c)\, n = 3$, also

$n = 3$, $f_l(c) = 1$. Für $l = 1$ wird jetzt $3 g_1^2(c) + c^2 + 4 = 4(c^2 + 1)$, — mit der KBr Entwicklung $2\sqrt{c^2 + 1} = 2c, \overline{2, 4c}$ — keine Primzahl; für $l = 2$, $c = 1$ entsteht $9 \cdot 3 + 5 = 32$ — mit der Entwicklung $\sqrt{32} = 5, \overline{1, 1, 1, 10}$ — also auch keine Primzahl.

Aus einer ähnlichen Überlegung würde noch einfacher folgen, daß für eine Primzahl der Form $4q + 1$ $\left| \frac{p+1}{2} \right.$ keine KBr-Entwicklung der genannten Form haben kann: in diesem Falle aber ist schon anderweitig bekannt, daß die Periode nicht von gerader Gliederzahl sein kann; denn jetzt ist die Pellsche Gleichung $t^2 - pu^2 = -4$ lösbar (s. z. B. Scholz [19], 110, Satz 73), woraus bekanntlich für jede Zahl der Diskriminante p folgt, daß die Periodenlänge ungerade ist.

Als *Gegenbeispiel für ungerades k* sei angeführt, daß der Fall $c = 2$, $k = 3$, $S = 0$ von Satz 8 liefert

$$\sqrt{25n^2 + 14n + 2} = 5n + 1, \overline{2, 2, 10n + 2}$$

und hier erscheinen für $n = 1, 3, 9, 11, 13$ bzw. die Primzahlen 41, 269, 2153, 3181, 4409.

Zu diesem ganzen § finden sich zahlreiche Einzelbeispiele und Bemerkungen bei Kraitchik [7], Kap. III, IV, 30—71. Für unser D ist dort A bzw. $A - \frac{1}{4}$ geschrieben, je nachdem S gerade oder ungerade ist. Unsere in gewissem Sinne abschließenden Sätze 6, 7, 8 sind jedoch dort keineswegs erreicht. Manche Bemerkungen stehen dort ohne Beweis und scheinen experimentell gefunden zu sein; etwa die Feststellung Nr. 22, S. 57, daß der symmetrische Teil der Entwicklung einer $\sqrt{A}$ niemals aus $3a + 2$ Einsen bestehen kann: dies ist ein Sonderfall unserer vollständigen Diskussion in Satz 8. Ebenso sind eine Reihe von numerischen Beispielen für Quadratsummenzerlegungen von A gegeben. Sie erweisen sich als Sonderfälle unserer Formel (41), die auf etwas versteckter liegenden Eigenschaften der Lucasschen rekurrenten Zahlfolgen beruht (und nicht auf ganzzahliges $D = A$ beschränkt ist).

§ 3.

Allgemeine Sätze über Periodenformen und Periodenlängen.

Im vorstehenden wie in der Literatur findet man eine Fülle von Beispielen algebraischer Funktionen der Gestalt

$$\sqrt{D(x)} + s(x)$$

($D(x)$ und $s(x)$ Polynome über dem Körper P_0 der Rationalzahlen), der Art, daß für alle ganzzahligen Werte $x = n$ $(\geqq n_0)$ eine regelmäßige Kettenbruchentwicklung besteht

$$\sqrt{D(n)} + s(n) = p_0(n), \overline{p_1(n), \ldots p_k(n)}$$

mit von n unabhängigem k, und mit Polynomen $p_\nu(x)$ über P_0 (die also für $n \geqq n_0$ sämtlich ganzzahlig werden); in etwas allgemeineren Fällen lassen sich wenigstens die Zahlen $\geqq n_0$ in eine endliche Anzahl von Klassen der Art aufteilen, daß für jede einzelne von ihnen eine einheitliche Entwicklung dieser Art besteht. So gilt z. B. für $D_h = n^2 + h$

$$\sqrt{D_1} = n, \overline{2n}; \quad \sqrt{D_{-1}} = n-1, \overline{1, 2n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\sqrt{D_2} = n, \overline{n, 2n}; \quad \sqrt{D_{-2}} = n-1, \overline{1, n-2, 1, 2n-2} \qquad (n \geqq 2)$$

$$\sqrt{D_4} = n, \overline{\frac{n}{2}, 2n} \qquad (n \equiv 0\,(2))$$

$$\sqrt{D_4} = n, \overline{\frac{n-1}{2}, 1, 1, \frac{n-1}{2}, 2n} \qquad (n \equiv 1\,(2), \geqq 3)$$

$$\sqrt{D_{-4}} = n-1, \overline{1, \frac{n-4}{2}, 1, 2n-2} \qquad (n \equiv 0\,(2), \geqq 6)$$

$$\sqrt{D_{-4}} = n-1, \overline{1, \frac{n-3}{2}, 2, \frac{n-3}{2}, 1, 2n-2} \qquad (n \equiv 1\,(2), \geqq 5)$$

Auf die *allgemeine Frage, wann* eine solche *einheitliche KB-Entwicklung* existiert, hoffe ich zurückkommen zu können; hier bringen wir einen speziellen Satz, der zeigt, daß die 6 eben erwähnten Fälle in gewissem Rahmen einzigartig sind.

Satz 10. *Es sei* $D_h(n) = n^2 + h$, h *ganzzahlig,* $\neq 0, \pm 1, \pm 2, \pm 4$. *Dann ist es, wie groß man auch die ganze Zahl* n_0 *wählen möge, nicht möglich, die Gesamtheit der natürlichen Zahlen* $\geqq n_0$ *so in eine endliche Anzahl von Klassen* $\mathfrak{K}$ *aufzuteilen, daß in jeder derselben eine einheitliche Kettenbruchentwicklung bestünde*

$$\sqrt{D_h(n)} = p_0(n), \overline{p_1(n), \ldots p_k(n)}. \qquad (n \geqq n_0;\ n \in \mathfrak{K}) \tag{42}$$

($p_\nu(x)$ Polynome, die für $x = n$ positiv ganzzahlig werden sollen, und ebenso wie k nur von der Auswahl der Klasse $\mathfrak{K}$ abhängen).

Angenommen nämlich, dies wäre doch der Fall! Es sei dann $\mathfrak{K}$ eine unter diesen Klassen, die unendlich viele n-Werte enthält, und deren genauere Auswahl wir uns noch vorbehalten. Es gilt dann nach S. 177 (16)(17) für alle $n \in \mathfrak{K}$ die Beziehung $A_{k-1}^2(n) - D_h(n) B_{k-1}^2(n) = (-1)^k$, und da es sich um unendlich viele n-Werte handelt, gilt identisch in x

$$A_{k-1}^2(x) - D_h(x) B_{k-1}^2(x) = (-1)^k. \tag{43}$$

Das besagt insbesondere, daß die ganze algebraische Funktion

$$f(x) = A_{k-1}(x) + B_{k-1}(x) \sqrt{D_h(x)} \tag{44}$$

des Körpers $C\left(x, \sqrt{D_h(x)}\right)$ (C komplexer Zahlkörper) in den beiden unendlichfernen Punkten der Riemannschen Fläche entgegengesetzte Ordnungszahl besitzt, sagen wir N und $-N$ (N positiv, da $f(x)$ nicht

konstant ist!). Eine solche Funktion ist jedenfalls $f^*(x) = (x + \sqrt{x^2+h})^N$, der Quotient f/f^* ist daher eine Konstante $\neq 0$ (da er weder Nullstelle noch Pol besitzt), man hat also genauer

$$f(x) = \left(\frac{x+\sqrt{x^2+h}}{\sqrt{|h|}}\right)^N,$$

— wo die Wurzel für reelle positive Werte positiv ist, wenn sie es in (44) war —, da wegen der Bedeutung der $A_{k-1}(n)$, $B_{k-1}(n)$ der Faktor von x^N in der Potenzentwicklung im unendlichen >0 ist, und wegen (43) für $x = 0$.

Wir setzen jetzt $f^2(x) = P(x) + Q(x)\sqrt{D_h(x)}$; dann sind auch $P(n) = A_{k-1}^2(n) + D_h(n) B_{k-1}^2(n)$ und $Q(n) = 2A_{k-1}(n) B_{k-1}(n)$ für $n \in \mathfrak{N}$ ganzzahlig. Ist ferner

$$\left(\frac{(n+\sqrt{n^2+h})^2}{|h|}\right)^\nu = P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots),$$

so wird $P_0 = 1$, $P_1 = \frac{2n^2+h}{|h|}$ und $P_N = P(n)$, $Q_N = Q(n)$.

Nunmehr unterscheiden wir 3 Fälle.

1) $|h|$ *ungerade und* $\geqq 3$. Als halbe Potenzsummen der Wurzeln der Gleichung

$$|h|\, t^2 - 2(2n^2+h)\, t + |h| = 0$$

genügen die P_ν der Rekursionsformel

$$|h|\, P_\nu - 2(2n^2+h)\, P_{\nu-1} + |h|\, P_{\nu-2} = 0 \qquad (\nu \geqq 2).$$

Daraus folgt induktiv. daß $|h|^\nu\, P_\nu$ ganz und $\equiv 2^{2\nu-1} n^{2\nu} \pmod{|h|}$. Für $\nu = N$ $(\geqq 1)$ ist nun schon P_N selbst ganz, und das gibt einen Widerspruch, wenn wir eine Klasse wählen, in der Zahlen $n \equiv \pm 1$ $(|h|)$ auftreten (und eine unendliche solche Klasse gibt es natürlich); denn dann wäre ja die linke Seite der letzten Kongruenz durch h teilbar, die rechte nicht.

2) $h = 2l$, $|l|$ *ungerade* $\geqq 3$. Es wird hier

$$P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu = \left(\frac{n^2+l+n\sqrt{n^2+2l}}{|l|}\right)^\nu,$$

also

$$P_1 = \frac{n^2+l}{|l|},\quad |l|\, P_\nu - 2(n^2+l)\, P_{\nu-1} + |l|\, P_{\nu-2} = 0$$

und daher ähnlich

$$|l|^\nu\, P_\nu \equiv 2^{\nu-1} n^{2\nu} \quad (|l|).$$

Für $\nu = N$ entsteht, da jetzt $|l|$ ungerade $\geqq 3$, der gleiche Widerspruch.

3) $h = 4l$, $|l| \geqq 2$, *sonst beliebig.*

Es wird

$$P_\nu + \sqrt{D_h(n)}\, Q_\nu = \left(\frac{n^2+2l+n\sqrt{n^2+4l}}{2|l|}\right)^\nu,$$

$$P_1 = \frac{n^2+2l}{2|l|}, \quad |l|\, P_\nu - (n^2+2l)\, P_{\nu-1} + |l|\, P_{\nu-2} = 0,$$

und

$$2|l|^\nu P_\nu \equiv n^{2\nu} (|l|),$$

woraus jetzt für jedes $|l|$ (auch gerade) $\geqq 2$ ein ähnlicher Widerspruch hervorgeht. Damit ist der Satz bewiesen. Aus ihm folgt z. B. für $h = 3$, daß, während bekanntlich die Entwicklung gilt $\sqrt{n^2+3} = n, \overline{\frac{2n}{3}, 2n}$ für $n \equiv 0\ (3)$ [3]), sich die Zahlen $\sqrt{n^2+3}$ mit $n \equiv \pm 1\ (3)$, $n \geqq n_0$, *nicht* durch eine oder mehrere Entwicklungen der Form (42) darstellen lassen; etwas schärfer ist dies nach dem Beweis 1) auch nicht für eine der beiden Unterklassen $n \equiv +1\ (3)$ oder $n \equiv -1\ (3)$ einzeln möglich.

Im allgemeinen wird bei Zahlfolgen wie (42) (linke Seite) der quadratische Zahlkörper mit n wechseln. Nunmehr betrachten wir Folgen ξ_n quadratischer Zahlen aus dem *nämlichen* Körper, und geben Bedingungen, unter denen hierbei für $n \to \infty$ beliebig lange primitive Kettenbruchperioden auftreten, so daß auch jetzt insbesondere eine Entwicklung der Form (42) nicht möglich ist.

Satz 11. *Es sei ξ eine quadratische Zahl positiver Differente. Dann sind unter den Zahlen $n\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$ solche mit beliebig langer primitiver Periode enthalten.*

Beweis. Wir wählen die ganze rationale Zahl g so, daß für $g\xi = \eta$ die Bedingungen (15) bei Satz 5 erfüllt sind. Dann haben die für $n = mg$ $(m = 1, 2, \ldots)$ hervorgehenden Zahlen der Folge $mg\xi = m\eta$ nach Satz 5 höchstens eingliedrige Vorperiode. Nun sei die natürliche Zahl N beliebig groß vorgeschrieben, und die positiven ganzen Zahlen $b_1, b_2, \ldots b_{2N}$ seien so gewählt, daß $b_{2N} \geqq 2$, und für *keine* Nummer $l \leqq N-1$ die *sämtlichen* Gleichungen

$$b_{\nu+l} = b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots l)$$

bestehen. Setzt man dann

$$r = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}],\ r' = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}-1],\ r'' = [0, b_1, b_2, \ldots b_{2N}+1],$$

so gilt $0 < r' < r < r'' < 1$.

Auf die Folge $m\eta$ läßt sich nun der einfachste Fall des Kroneckerschen Approximationssatzes anwenden (vgl. etwa Perron [14], 144, Satz 60 oder Hardy-Wright [4] 363, Satz 438); daher gilt für geeignetes n $r' < n\xi - [n\xi] < r''$. Also beginnt nach einem bekannten Satze (P 41, Satz 9] die Entwicklung von $n\xi - [n\xi]$ mit $0, b_1, b_2, \ldots b_{2N-1}$. Eine Periode von $n\xi$ können wir mit b_1 beginnen, und ihre Länge ist wegen der Wahl der b_ν sicher $> N$, also beliebig groß, wie gewünscht.

[3]) Vgl. etwa die Tafel S. 181, $k = 2$.

Das folgende Verfahren gründet sich auf die *additive* Hinzufügung eines Zusatzgliedes zu einem gegebenen rKB.

Satz 12. *Ist ξ eine reduzierte Zahl und r rational und von hinlänglich kleinem Betrag, so hat $\xi+r$ eine beliebig lange primitive Periode, in der überdies jene von ξ beliebig oft hintereinander auftritt.*

Beweis[4]). Für hinreichend kleines $|r|$ ist $\eta = \xi + r$ ebenfalls reduziert, und anderseits stimmt nach dem vorhin benützten Satze die Entwicklung von η mit der von ξ dann beliebig weit, aber doch nicht völlig überein. Es tritt also in der Entwicklung von η beliebig oft, sagen wir m mal, die Periode von ξ hintereinander auf, aber dann kommt eine Abweichung. Die primitive Periode von η hat also mindestens $mk+1$ Glieder.

Es sei z. B. $r = r_n = g:n$ gesetzt $((g, n) = 1)$. Gehört ξ zur Diskriminante d, so η zu $n^4 d$, wofern nur $(a, n) = 1$, wenn $at^2+bt+c=0$ die primitive quadratische Gleichung für ξ ist. Man kann also zu jeder Zahlklasse $\mathfrak{k}$ der Diskriminante d ein n so angeben, daß zur Diskriminante $n^4 d$ eine Zahlklasse $\mathfrak{k}'$ existiert, deren Periode jene erste in beliebig oftmaliger Wiederholung enthält, und kann dies für geeignetes hinreichend großes n auch bei allen Klassen $\mathfrak{k}$ gleichzeitig erreichen (mit gleichem r_n, aber nicht notwendig gleichem $\mathfrak{k}'$).

Beispiel zu Satz 12. $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \overline{1}$. $\xi + r$ ist reduziert, sobald $\frac{\sqrt{5}-3}{2} < r < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. $d = 5$.

Ferner wird jetzt (vgl. (31)) $A_\nu = f_{\nu+2}(1) = f_{\nu+2}$ (Fibonaccische Zahlen), $B_\nu = f_{\nu+1}$, und es wird für η die Periodenlänge $> N-1$, wenn r zwischen $\frac{f_{N+2}}{f_{N+1}} - \xi$ und $\frac{f_{N+1}}{f_N} - \xi$ liegt, wie man nachrechnen kann. Für $N = 2$ ist z. B. $r = \frac{1}{3}$ zulässig, und man erhält

$$\frac{5+3\sqrt{5}}{6} = \overline{1, 1, 19, 1, 1, 3}.$$

Für $N = 4$ kann $r = \frac{1}{24}$ genommen werden; es wird $n^4 d = 24^4 \cdot 5 = 1658880$ und $\frac{13+12\sqrt{5}}{24} = \xi + r = \zeta$ erhält die mit der folgenden Periode beginnende Entwicklung

$$(1)^4,\ 15,\ 3;\ 1,\ 1,\ 10,\ 13;\ 2,\ 6,\ 3,\ 1,\ 4,\ 1;\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1.$$

Beginnt man die Periode nach den Strichpunkten, so erhält man, nebenbei bemerkt, die Werte $\zeta+\frac{1}{4}$, $\zeta+\frac{1}{2}$, $\zeta-\frac{1}{4}$, die also hier mit ζ äquivalent sind. Beginnt man aber mit dem vorletzten Glied, so sieht man, daß $\zeta^* = \frac{288\sqrt{5}+410}{649}$ eine mit 6 Einsen beginnende Pe-

[4]) In aufgrund einer freundlichen Anregung von Herrn Perron verkürzter Form.

riode hat. Demnach ist $\xi - \xi^*$ zwischen f_7/f_6 und f_8/f_7 gelegen, somit

$$|\xi - \xi^*| < \frac{1}{f_6 f_7} = \frac{1}{104},$$

was die numerische Rechnung bestätigt. Diese reduzierte Zahl ξ^* der Diskriminante $n^4 d$ approximiert also ξ noch besser, als ξ es tut. Zur Klärung der Beziehungen zwischen den Klassen und *rKB*-Perioden, deren Diskriminanten $d = q^2 d_1$ zum gleichen Stamm gehören, wäre es vielleicht angebracht, solchen Approximationen systematisch nachzugehen.

Will man schließlich noch Zahlfolgen aus einem quadratischen Körper haben, die *Zahlen mit beliebig langer Vorperiode* enthalten, so ist ein naheliegendes Bildungsverfahren dieses:

Es sei ξ eine reduzierte Körperzahl der primitiven Periode k: $\xi = \overline{b_0, b_1, \ldots b_{k-1}}$, und $\eta = c_0, c_1, \ldots$ eine Irrationalzahl, für die nur $c_{\nu_n - 1} \neq b_{k-1}$ für eine Folge $\nu = \nu_n \to \infty$; ihre Näherungsbrüche seien C_ν/D_ν. Wir bilden dann die Zahlen

$$(45) \qquad \eta_n = \frac{\xi C_{\nu_n - 1} + C_{\nu_n - 2}}{\xi D_{\nu_n - 1} + D_{\nu_n - 2}} = [c_0, c_1, \ldots c_{\nu_n - 1}, \overline{b_0, b_1, \ldots b_{k-1}}].$$

Es liegt auf der Hand, daß die Periode nicht vor dem ν_{n+1}ten Glied beginnen kann. Will man gleichzeitig auch noch die Periode wachsen lassen, so setze man für ξ eine der vorher konstruierten Folgen ein (vgl. Satz 11, 12), und sorge dafür, daß $c_{\nu_n - 1} \neq b_{k_n - 1}$, wenn k_n die primitive Periode der reduzierten Zahl ξ_n bedeutet.

Wir schließen mit einem, den Fällen von Satz 6 verwandten *Beispiel* für *beliebig lange Vorperioden aus gleichen Zahlen*. Es seien $b, c \geqq 1$ und $\xi = \overline{b} = \frac{1}{2}(b + \sqrt{b^2 + 4})$; $\eta = \overline{c} = \frac{1}{2}(c + \sqrt{c^2 + 4})$. Aus (45) ergibt sich dann nach einer kleinen Umformung unter Beachtung der Eigenschaften (32) (34) der $f_\nu(c)$ die Formel

$$\eta_n = \frac{\xi f_{n+1}(c) + f_n(c)}{\xi f_n(c) + f_{n-1}(c)} = \frac{(b-c) f_n^2(c) + (-1)^n \xi}{(b-c) f_{n-1}(c) f_n(c) + (-1)^n} = (c)^n, \overline{b}.$$

Insbesondere wird für $b = c + 1$

$$\frac{f_n^2(c) + (-1)^n \xi}{f_{n-1}(c) f_n(c) + (-1)^n} = (c)^n, \overline{c+1} \text{ mit } \xi = \tfrac{1}{2}(c + 1 + \sqrt{c^2 + 2c + 5})$$

und ganz speziell

$$\frac{f_n^2(1) + (-1)^n + (-1)^n \sqrt{2}}{f_n(1) f_{n-1}(1) + (-1)^n} = (1)^n, \overline{2},$$

wo jetzt die $f_\nu(1)$ die gewöhnlichen Fibonaccischen Zahlen sind.

(Eingegangen am 8. März 1948.)

Schriftenverzeichnis.

A. Arwin.

[0] Einige periodische Kettenbruchentwicklungen. J. reine angew. Math. **155** (1926), 111—128.

E. Bessel-Hagen.

[1] Zahlentheorie. Pascals Repertorium der Höheren Mathematik. 2. A. 1929. Kap. 27. Zitiert „B".

Z. Chajot.

[2] Heronische Näherungsbrüche. Jber. Deutsche Math. Ver. **42** (1933), 130—135.

H. Dörrie.

[3] Quadratische Gleichungen. München, Oldenbourg 1943.

Hardy und Wright.

[4] An introduction to the theory of numbers. Oxford, Clarendon 1938.

A. Hurwitz.

[5] Über die Entwicklung komplexer Zahlen in Kettenbrüche. Acta Math. **11** (1888), 187—200.

K. Kommerell.

[6] Das Grenzgebiet der elementaren und höheren Mathematik. Leipzig, Köhler 1936.

M. Kraitchik.

[7] Théorie des nombres I. Paris, Gauthiers-Villars 1926, 1. partie.

E. Landau.

[8] Vorlesungen über Zahlentheorie I. Leipzig, Hirzel 1927.

E. Lucas.

[9] Théorie des nombres I. Paris, Gauthiers-Villars 1891.

H. Minkowski.

[10] Über periodische Approximationen algebraischer Zahlen. Acta Math. **26** (1902), 335—351.

A. Ostrowski.

[11] Über einige Verallgemeinerungen des Eulerschen Produkts $\prod_{\nu=0}^{\infty}(1+x^{2^\nu}) = \frac{1}{1-x}$. Verhandl. Naturforsch. Ges. Basel **40** (1929), 153—214.

W. Patz.

[12] Tafel der regelmäßigen Kettenbrüche für Quadratwurzeln aus den natürlichen Zahlen von 1—10 000. Leipzig, Akad. Verlagsbuchhdlg. 1941.

O. Perron.

[13] Die Lehre von den Kettenbrüchen. 2. Aufl. Leipzig, Teubner 1929. Zitiert „P".

[14] Irrationalzahlen. Göschens Lehrbücherei 1, 2. Aufl. Berlin, De Gruyter 1939.

[15] Über die Approximation irrationaler Zahlen durch rationale. Sitzungsber. Heidelberger Akad. Wiss. A **1921**, 4. Abh.

[16] Quadratische Zahlkörper mit Euklidischem Algorithmus. Math. Ann. **107** (1932), 489—495.

H. Scheffler.

[17] Die unbestimmte Analytik. Hannover 1854, 682 S.

Hermann Schmidt.

[18] Zur Kettenbruchtheorie der zweiseitigen Zahlklassen. Archiv der Mathematik **1** (1948/49), 333—339.

A. Scholz.

[19] Einführung in die Zahlentheorie. Sammlung Göschen, Berlin 1939.

Ein Homomorphiesatz der Theorie der Verbände.

Von

W. Schwan in Osterwald.

1. Einleitung.

Die vorliegende Mitteilung ergänzt die Arbeit [A 3][1]) über die Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden, deren Bezeichnungsweise sie übernimmt, durch die Betrachtung eines weiteren Sonderfalles: Sind für ein gegebenes Elementepaar (a, b) die vier „kleinen Teilbünde"

$$(1) \qquad \frac{a}{a \wedge b}, \ \frac{b}{a \wedge b} \qquad \frac{a \vee b}{a}, \ \frac{a \vee b}{b}$$

Teilverbände des Verbandes V, genau dann ist auch die Menge

$$(2) \qquad F(a,b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ein Teilverband von V. Diesem sind die Teilbünde

$$(3) \qquad V^{\smile\frown} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \text{ und } V^{\frown\smile} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

derjenigen nach a und b fastzerlegbaren Elemente, die progressiv bzw. regressiv nach a und b zerlegt werden können, homomorph. Für diese Teilbünde besagt die Voraussetzung, daß sie Teilverbände der Teilbünde

$$(4) \qquad U^{\smile} = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \text{ bzw. } U^{\frown} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}$$

sind.

2. Ein halber Homomorphiesatz.

2. 1. Die Transformation $z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ transformiert den Verband V nach [A 3, 2. 1.] in den Teilbund $V^{\smile} = a/1 \vee b/1$. Da dieser regressiv nach der Methode $(x \cap y)^{\smile}$ multipliziert, so bilden die den Elementen x und y von V in $V^{\smile}$ entsprechenden Elemente $x^{\smile}$ bzw. $y^{\smile}$ im Teilbund $V^{\smile}$ das regressive Produkt $(x^{\smile} \cap y^{\smile})^{\smile}$. Und da nach

[1]) Die Angaben in den eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

[A 3, Gleichung 49] $a \cap z^{\smile} = a \cap z$ und $b \cap z^{\smile} = b \cap z$ ist, so haben wir $(x^{\smile} \cap y^{\smile})^{\smile} = (a \cap x^{\smile} \cap y^{\smile}) \cup (b \cap x^{\smile} \cap y^{\smile}) = (a \cap x \cap y) \cup (b \cap x \cap y) = (x \cap y)^{\smile}$. Und dual. Damit ist bereits bewiesen:

Hilfssatz 1. Das von der Transformation $z^{\smile} = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ entworfene Bild des Verbandes V, nämlich der Teilbund $V^{\smile}$, ist V hinsichtlich der regressiven Multiplikation homomorph. Und dual. Als Formeln:

(5) $\qquad (x \cap y)^{\smile} = (x^{\smile} \cap y^{\smile})^{\smile}, \quad (x \cup y)^{\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown}$

2.2. Daß $V^{\smile}$ zu V hinsichtlich der progressiven Multiplikation i. A. nicht homomorph ist, zeigt das Beispiel Fig. 1. $V^{\smile}$ multipliziert ja progressiv wie V und in Fig. 1 ist für $x = a$ und $y = c$ einerseits $(x \cup y)^{\smile} = (a \cup c)^{\smile} = (a \cup b)^{\smile} = a \cup b$, andererseits $x^{\smile} \cup y^{\smile} = a \cup (a \cap c) = a$, sodaß sich $(x \cup y)^{\smile} \supset x^{\smile} \cup y^{\smile}$ ergibt, während zur Homomorphie $(x \cup y)^{\smile} = x^{\smile} \cup y^{\smile}$ erforderlich wäre. Allgemein gilt, wie das Zurückgreifen auf die Bedeutung der Symbole sofort ergibt, für zwei beliebige Elemente des Verbandes nur

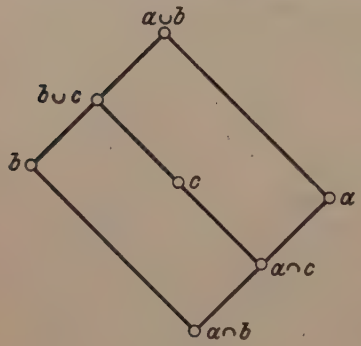


Fig. 1.

(6) $(x \cup y)^{\smile} = x^{\smile} \cup y^{\smile}, (x \cap y)^{\frown} = x^{\frown} \cap y^{\frown}$.

Um nun für beide Multiplikationen einen Homomorphismus zu erhalten, spezialisieren wir das Elementepaar (a, b) jetzt so, daß die Menge $F(a, b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ein Teilverband von V wird, und wenden sodann die Transformationen $z^{\smile}$ und $z^{\frown}$ nur auf diesen Teilverband an.

3. $F(a, b)$ als Teilverband.

3.1. Da die Menge $F(a, b)$ nach [A 3, 3.1.] aus den $z^{\smile\smile} = z^{\smile}$ und $z^{\frown\frown} = z^{\frown}$ genügenden Elementen z besteht, so ist $F(a, b)$ genau dann ein Teilverband von V, wenn für irgend zwei Elemente x und y von $F(a, b)$ die Gleichungen

(7a) $\qquad (x \cup y)^{\smile\frown} = (x \cup y)^{\smile}, \quad (x \cap y)^{\frown\smile} = (x \cap y)^{\frown}$

und

(7b) $\qquad (x \cup y)^{\frown\smile} = (x \cup y)^{\frown}, \quad (x \cap y)^{\smile\frown} = (x \cap y)^{\smile}$

bestehen. Aber für Elemente von $F(a, b)$ folgt (7b) aus (7a). Es ist nämlich

(8) $(x \cup y)^{\frown\smile} = (x \cup y)^{\smile\frown\smile} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown\smile} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown} = (x \cup y)^{\frown}$

und dual. Und zwar ergibt sich die erste dieser Gleichungen sofort aus der ersten Gleichung (7a), die zweite und vierte aus (5) und die

dritte schließlich aus folgender Überlegung: Aus $x \in F(a, b)$ und $y \in F(a, b)$ folgt $x^\frown \in V^{\frown\frown}$ und $y^\frown \in V^{\frown\frown}$. Und da $V^{\frown\frown}$ progressiv nach der Methode $(x \cup y)^\frown$ multipliziert, so ist auch $(x^\frown \cup y^\frown)^\frown \in V^{\frown\frown}$. Also genügt $(x^\frown \cup y^\frown)^\frown$ der Gleichung $z^{\frown\frown} = z$ von $V^{\frown\frown}$. — Damit ist bewiesen:

Hilfssatz 2. Die Menge $F(a, b)$ der nach a und b fastzerlegbaren Elemente ist genau dann ein Teilverband von V, wenn für irgend zwei Elemente x und y von $F(a, b)$ die Gleichungen (7a) bestehen.

3. 2. Wir gehen jetzt darauf aus, die Bedingung (7a) durch eine einfachere zu ersetzen: Nach [A 1, 4. 4.] besteht der Teilbund $a/(a \wedge b)$ aus den nach a und b zerlegbaren Teilern von a. Es sei z ein nach a und b fastzerlegbarer Teiler von a. Als fastzerlegbares Element genügt z der Gleichung $z^{\frown\frown} = z^\frown$, die ausführlich geschrieben $(a \cap (b \cup z)) \cup (b \cap (a \cup z)) = (a \cap z) \cup (b \cap z)$ lautet, also bei einem Teiler z von a in die Gleichung $a \cap (b \cup z) = z$ von $a/(a \wedge b)$ übergeht. Hiernach ist jeder nach a und b fastzerlegbare Teiler von a nach a und b sogar zerlegbar. Da auch die Umkehrung gilt, so läßt sich sagen, daß der Teilbund $a/(a \wedge b)$ aus den nach a und b fastzerlegbaren Teilern von a besteht. Von $b/(a \wedge b)$ gilt entsprechendes, von $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ das Duale. — Hieraus folgt: Ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V, dann sind auch die vier „kleinen Teilbünde" (1) Teilverbände von $F(a, b)$ und somit von V.

3. 3. Wir behaupten, daß dieses Ergebnis sich umkehren läßt und beweisen zuerst:

Satz 1. Sind die vier „kleinen Teilbünde" $a/(a \wedge b)$, $b/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ Teilverbände des Verbandes V, genau dann sind die beiden Teilbünde

$$(9) \qquad V^\smile = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \text{ und } V^{\smile\smile} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b}$$

Teilverbände der Teilbünde

$$(10) \qquad U^\smile = \frac{a}{a \cap b} \vee \frac{b}{a \cap b} \text{ bzw. } U^{\smile\smile} = \frac{a \cup b}{a} \wedge \frac{a \cup b}{b}.$$

Beweis. Der Teilbund $V^{\smile\smile}$ wird nicht nur vom Teilbund $U^\smile$ umfaßt, sondern er bedient sich nach [A 3, 6. 7.] auch derselben regressiven Multiplikation wie $U^\smile$. Dagegen multipliziert $V^{\smile\smile}$ progressiv nach der Methode $(x \cup y)^{\smile\smile}$, also i. A. anders als $U^\smile$, das progressiv wie V multipliziert. Sind aber $a/(a \wedge b)$ und $b/(a \wedge b)$ Teilverbände von V und somit von $a/(a \cap b)$ bzw. $b/(a \cap b)$, dann zeigt sich, daß auch die progressive Multiplikation von $V^{\smile\smile}$ — man führe sie nach [A 3, 6. 4.] „komponentenweise" aus! — mit der von $U^\smile$ übereinstimmt. Also ist dann $V^{\smile\smile}$ Teilverband von $U^\smile$. Und dual. — Die Umkehrung ergibt sich daraus, daß $a/(a \wedge b)$ Teilverband von $V^{\smile\smile}$ und $a/(a \cap b)$ Teilverband von $U^\smile$ ist und daß $a/(a \wedge b)$ von $a/(a \cap b)$ umfaßt wird. Ist

also $V^{\smile\frown}$ Teilverband von $U^{\smile}$, dann ist auch $a/(a \wedge b)$ Teilverband von $U^{\smile}$ und somit von $a/(a \cap b)$ und entsprechend $b/(a \wedge b)$ Teilverband von $b/(a \wedge b)$. Und dual.

3. 4. Wir führen jetzt den mit 3. 3. begonnenen Beweis zu Ende: Ist $V^{\smile\frown}$ Teilverband von $U^{\smile}$, dann gilt für irgend zwei Elemente von $V^{\smile\frown}$ die Gleichung $(x \cup y)^{\smile\frown} = x \cup y$. Und da $V^{\smile\frown}$ aus den Elementen $z^{\smile}$ mit $z \in F(a, b)$ besteht, so gilt für irgend zwei Elemente x und y von $F(a, b)$

$$(11) \qquad (x^{\smile} \cup y^{\smile})^{\smile\frown} = x^{\smile} \cup y^{\smile}.$$

Diese Gleichung läßt sich noch vereinfachen: Nach [A 3, Satz 4, Folgerung 2] ist die Überperspektivität $V^{\smile\frown} \sim V^{\frown\smile}$ die Zuordnung $z^{\smile} \rightleftarrows z^{\frown}$ mit $z \in F(a, b)$. Nun ist $(x^{\smile} \cup y^{\smile})^{\smile\frown}$ das progressive Produkt von $x^{\smile}$ und $y^{\smile}$ in $V^{\smile\frown}$. Ihm entspricht durch die Überperspektivität das progressive Produkt von $x^{\frown}$ und $y^{\frown}$ in $V^{\frown\smile}$ und das ist $(x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\frown}$. Also ist $(x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown} = (x^{\frown} \cup y^{\frown})^{\smile\frown}$. Und da sich das letztere Produkt nach Hilfssatz 1 $(x \cup y)^{\smile\frown}$ schreiben läßt, so geht (11) in die erste der Gleichungen (12) über. Die zweite ergibt sich dual.

$$(12) \qquad (x \cup y)^{\smile\frown} = x^{\smile} \cup y^{\smile}, \quad (x \cap y)^{\frown\smile} = x^{\frown} \cap y^{\frown}.$$

Nun bemerke man, daß aus $z^{\smile} = z = z^{\frown}$ folgend, über (6) hinaus

$$(13) \qquad \begin{aligned} (x \cup y)^{\smile\frown} &= (x \cup y)^{\smile} = x^{\smile} \cup y^{\smile}, \\ (x \cap y)^{\frown\smile} &= (x \cap y)^{\frown} = x^{\frown} \cap y^{\frown} \end{aligned}$$

besteht und zwar für beliebige Elemente von V. Daher folgen für zwei Elemente von $F(a, b)$ aus (12) die Gleichungen (7 a) und aus diesen nach dem Hilfssatz 2, daß $F(a, b)$ Teilverband von V ist. Die Umkehrung wurde bereits in 3. 2. bewiesen. Im ganzen gilt also

Satz 2 Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Die Menge

$$(14) \qquad F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente von V ist genau dann ein Teilverband von V, wenn die vier „kleinen Teilbünde" $a/(a \wedge b)$, $b/(a \wedge b)$, $(a \vee b)/b$ und $(a \vee b)/a$ Teilverbände von V sind.

Ein Elementepaar (a, b) des Verbandes, bei dem dies zutrifft, soll eine Konsonanz von V heißen, jedes andere eine Dissonanz. Beispiele von Konsonanzen sind nicht eben selten: In den modularen Verbänden ist jedes Elementepaar eine Konsonanz (Die „kleinen Teilbünde" sind hier sogar Zwischenreiche). Aber auch in den nichtmodularen Verbänden niederer Ordnung sucht man vergebens nach Dissonanzen. Demnach stellen die dissonanzenfreien Verbände eine Verallgemeinerung der modularen dar. Ein Beispiel einer Dissonanz bildet das Paar $a = p \cup q$, $b = r$ des in [A 3, 9. 2. 2.] besprochenen Verbandes der Ordnung 19.

4. Der Homomorphiesatz.

4. 1. Ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V, dann gelten, aus (7 a) und (12) folgend, für irgend zwei Elemente von $F(a, b)$ die Gleichungen

(15) $$(x \cup y)^{\check{}} = x^{\check{}} \cup y^{\check{}}, \quad (x \cap y)^{\hat{}} = x^{\hat{}} \cap y^{\hat{}}.$$

Hierin sind $x^{\check{}} \cup y^{\check{}}$ und $x^{\hat{}} \cap y^{\hat{}}$ zufolge (11) und der dualen Gleichung die innerhalb $V^{\check{}\check{}}$ bzw. $V^{\hat{}\hat{}}$ gebildeten progressiven bzw. regressiven Produkte von $x^{\check{}}$ und $y^{\check{}}$ bzw. $x^{\hat{}}$ und $y^{\hat{}}$. Demnach besagen die Gleichungen (15) zusammen mit den für beliebige x, y gültigen Gleichungen (5), daß die Teilbünde $V^{\check{}\check{}}$ und $V^{\hat{}\hat{}}$ dem Teilverbande $F(a, b)$ durch die Abbildungen $z^{\check{}}$ bzw. $z^{\hat{}}$ homomorph sind. Und da bei diesen Abbildungen jedes Element des einen oder anderen Teilbundes als Bild genau der ihm für a und b kongruenten Elemente auftritt [vgl. A 3, 7.], so ist das Ergebnis:

Satz 3. Ist die Menge

(16) $$F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente des Verbandes V ein Teilverband von V, dann sind die beiden Teilbünde

(17) $$V^{\check{}\check{}} = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} \text{ und } V^{\hat{}\hat{}} = \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b}$$

ihm homomorph und zwar derart, daß jedes ihrer Elemente genau die ihm für a und b kongruenten darstellt.

4. 2. Wir erinnern daran, daß nach [A 3, 8. 2.] die Klassen der für a und b kongruenten fastzerlegbaren Elemente in jedem Falle einen $V^{\check{}\check{}}$ und $V^{\hat{}\hat{}}$ isomorphen Verband $F(a, b)$ bilden. Dieser ist also, wenn $F(a, b)$ Teilverband von V ist, $F(a, b)$ homomorph, sofern man jede Klasse als Bild ihrer Elemente betrachtet. Anders gesagt, gilt im Falle der Konsonanz für die Elemente von $F(a, b)$ folgende „Regel der korrespondierenden Multiplikation“: Aus $p = q\ (a, b)$ und $r = s\ (a, b)$ folgt $p \cup r \equiv q \cup s\ (a, b)$ und $p \cap r \equiv q \cap s\ (a, b)$.

5. Konsonanz und Distributivität.

5. 1. Ob die Menge $F(a, b)$ ein Teilverband von V ist oder nicht, in jedem Falle enthält sie $a \cup b$ und $a \cap b$ als oberstes bzw. unterstes Element. Wir werden deshalb sagen, a und b seien komplementäre Elemente von $F(a, b)$.

5. 2. Im Falle der Konsonanz gelten für die Elemente von $F(a, b)$ die Gleichungen (15), die ausführlich geschrieben

(18 a) $$(a \cap (x \cup y)) \cup (b \cap (x \cup y)) = ((a \cap x) \cup (a \cap y)) \cup ((b \cap x) \cup (b \cap y))$$

(18 b) $$(a \cup (x \cap y)) \cap (b \cup (x \cap y)) = ((a \cup x) \cap (a \cup y)) \cap ((b \cup x) \cap (b \cup y))$$

lauten. In (18a) erscheint das Element $(x \cup y)^{\smile}$ auf zwei Arten progressiv nach a und b zerlegt und zwar beide Male innerhalb des Teilverbandes $F(a, b)$. Nach [A 3, 6. 2.] sind beide Zerlegungen identisch. Und dual. Also lassen sich die Gleichungen (18) in je zwei zerfällen:

(19a) $a \cap (x \cup y) = (a \cap x) \cup (a \cap y),\ b \cap (x \cup y) = (b \cap x) \cup (b \cap y)$

(19b) $a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y),\ b \cup (x \cap y) = (b \cup x) \cap (b \cup y).$

Erklären wir also

Erklärung 1. Ist a ein Element und M eine Menge von Elementen eines Verbandes V, dann heißt a in M distributiv, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M die Gleichungen (19 links) bestehen. Dann lautet unser Ergebnis: Ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V, dann sind a und b in $F(a, b)$ distributiv.

Jetzt werde umgekehrt vorausgesetzt, daß a und b in der Menge $F(a, b)$ distributiv sind. Dann gilt folgendes: Nach [A 1, 5. 2.] multipliziert der Teilbund $a/(a \wedge b)$ nach den Methoden $x \cap y$ bzw. $(x \cup y)^{\frown} = a \cap (b \cup x \cup y)$. Da er von $F(a, b)$ umfaßt wird, so folgt für irgend zwei Elemente x und y von $a/(a \wedge b)$ aus der Voraussetzung $(x \cup y)^{\frown} = (a \cap b) \cup (a \cap x) \cup (a \cap y) = (a \cap b) \cup x \cup y = x \cup y$. Also ist $a/(a \wedge b)$ Teilverband von V. Ebenso $b/(a \wedge b)$ und dual $(a \vee b)/b$ sowie $(a \vee b)/a$, also nach Satz 2 auch $F(a, b)$. — Im ganzen gilt also: Die Menge $F(a, b)$ enthält a und b immer als komplementäre Elemente. Sind a und b in ihr auch distributiv, genau dann ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V.

5. 3. Dieses Ergebnis ist der Abrundung fähig: Für die $z \in F(a, b)$ sind die Subsumptionen [A 3, Formel (18)] oder die Gleichungen

(20a) $a \cap (b \cup z) = a \cap z,\ b \cap (a \cup z) = b \cap z$

(20b) $a \cup (b \cap z) = a \cup z,\ b \cup (a \cap z) = b \cup z$

charakteristisch. Mit ihrer Hilfe oder im Anschluß an [A 3, Satz 2. 1.] beweist man, daß der von a und b und dem nach a und b fastzerlegbarem Element z erzeugte Teilverband Z von V i. A. die Ordnung 11 und die in Fig. 2 dargestellte Struktur hat. In den Fällen $z = z^{\smile}$ und $z = z^{\frown}$ geht er in den Verband Fig. 3 über, der übrigens in dem Verband Fig. 2 als Teilverband steckt. Eine weitere Erniedrigung der Ordnung tritt nur ein, wenn z nach a und b sogar zerlegbar ist. Hieraus ersehen wir nebenbei, daß jeder Verband, dessen Elementepaare nicht alle zerlegend sind, einen Verband 10. Ordnung des in Fig. 3 dargestellten Typs als Teilverband umfaßt.

5. 4. Da Z in jedem Falle aus lauter nach a und b fastzerlegbaren Elementen besteht, so enthält Z nach dem Ergebnis von 5. 2. die Elemente a und b als komplementäre distributive Elemente. — Es sei jetzt T irgend ein Teilverband von V, der a und b als komplementäre distributive Elemente enthält. Dann gilt für jedes $z \in T$

offenbar $a \cap z^{\frown} = a \cap (b \cup z) = (a \cap b) \cup (a \cap z) = a \cap z$ und ebenso $b \cap z^{\frown} = b \cap z$. Und da $a \cup z^{\frown} = a \cup z$ und $b \cup z^{\frown} = b \cap z$ ohnehin

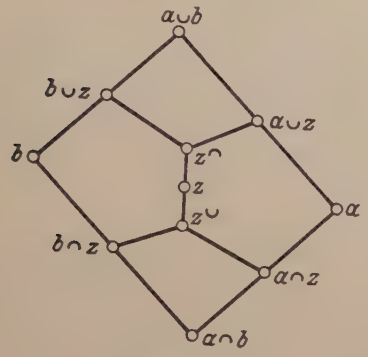


Fig. 2

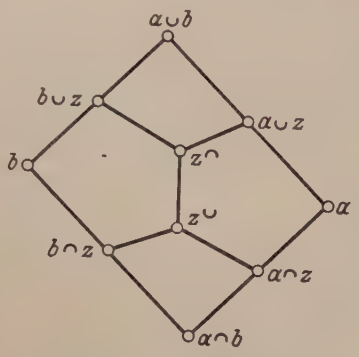


Fig. 3

bestehen, so ergibt sich $z^{\frown} \equiv z\ (a, b)$ und dual $z^{\smile} \equiv z\ (a, b)$, also nach [A 3. 7. 2.] im ganzen $z \in F(a, b)$. Es umfaßt also $F(a, b)$ jeden Teilverband von V, der a und b als komplementäre distributive Elemente enthält, und es gehört auch jedes $z \in F(a, b)$ einem solchen Teilverband an. Demnach können wir das Ergebnis von 5. 2. jetzt wie folgt abrunden:

Satz 4. Die Menge

$$F(a, b) = \frac{a \vee b}{a} \wedge \frac{a \vee b}{b} : \frac{a}{a \wedge b} \vee \frac{b}{a \wedge b} \tag{21}$$

der nach a und b fastzerlegbaren Elemente eines Verbandes V ist die Vereinigungsmenge aller Teilverbände von V, die a und b als komplementäre distributive Elemente enthalten. Sie enthält selbst a und b als komplementäre Elemente. Sind a und b in ihr auch distributiv, genau dann ist $F(a, b)$ ein Teilverband von V.

6. Zerlegende Konsonanzen.

6. 1. Der hier betrachtete Sonderfall der Konsonanz ist dem bereits in [A 3. 9] behandelten Sonderfall des zerlegenden Elementepaares nebengeordnet. Denn in Fig. 2 und Fig. 3 ist (a, b) eine nicht-zerlegende Konsonanz und in [A 3, Fig. 2] eine zerlegende Dissonanz. Man kann daher die beiden Sonderfälle kombinieren und zerlegende Konsonanzen betrachten.

Dieser Fall wurde bereits in [A 3, 9. 2. 2.] gestreift: Er liegt genau dann vor, wenn die beiden Teilbünde $V^{\frown\frown}$ und $V^{\smile\smile}$ als Teilverband zusammenfallen. Ist aber der eine ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer und es sind beide identisch.

Beispiele: In den endlichen Verbänden bis zur 9. Ordnung sind nach 5. 3. alle Elementepaare und daher insbesondere alle Konsonanzen

zerlegend. In den modularen Verbänden vollends, aber auch gewissen nicht-modularen wie z. B. dem 5. Ordnung ist jedes Elementepaar eine zerlegende Konsonanz.

6. 2. Aus Satz 4 und [A 3, Satz 7] ergibt sich, daß (a, b) genau dann eine zerlegende Konsonanz ist, wenn a und b in $F(a, b)$ sowohl distributiv als auch kürzbar sind. Aber das läßt sich einfacher sagen:

Erklärung 2. Is a ein Element und M eine Menge von Elementen eines Verbandes V, dann heißt a in M neutral, wenn für irgend zwei Elemente x und y von M die Gleichungen

$$(22\,a) \qquad x \cap (a \cup y) = (x \cap a) \cup (x \cap y)$$

$$(22\,b) \qquad x \cup (a \cap y) = (x \cup a) \cap (x \cup y)$$

bestehen.

Hilfssatz 3. Ist a in $F(a, b)$ distributiv und kürzbar, dann ist a in $F(a, b)$ neutral und umgekehrt. Von b gilt entsprechendes.

Beweis 1. Es sei a in $F(a, b)$ distributiv und kürzbar und $x \in F(a, b)$ sowie $y \in F(a, b)$. Dann sind nach 5. 3. und 5. 4. auch $a \cap x$, $a \cap y$, $a \cup x$ und $a \cup y$ Elemente von $F(a, b)$. Setzen wir

$$(23) \qquad (x \cap a) \cup (x \cap y) = p, \; x \cap (a \cup y) = q,$$

dann ist $p =(= q$, also auch $a \cap p =(= a \cap q = a \cap x$, andererseits aber $p =)= a \cap x$, also auch $a \cap p =)= a \cap x$ und somit $a \cap p = a \cap q$. Weiter ist $a \cup p = a \cup (x \cap y) = (a \cup x) \cap (a \cup y)$ und wegen $a \cup y \in F(a, b)$ ebenso $a \cup q = (a \cup x) \cap (a \cup y)$, also $a \cup p = a \cup q$. Aus $a \cap p = a \cap q$ und $a \cup p = a \cup q$ folgt nach Vor. $p = q$, d. h. (22 a). Die Gleichung (22 b) ergibt sich dual.

2. Jetzt sei umgekehrt a in $F(a, b)$ neutral und wiederum $x \in F(a, b)$ sowie $y \in F(a, b)$. Dann finden wir mit Hilfe von $a \cup x \in F(a, b)$ durch zweimalige Anwendung der Regel (22 a)

$$\begin{aligned}(a \cup x) \cap (a \cup y) &= ((a \cup x) \cap a) \cup ((a \cup x) \cap y) = a \cup ((a \cup x) \cap y) \\ &= a \cup (a \cap y) \cup (x \cap y) = a \cup (x \cap y)\end{aligned}$$

und dual $(a \cap x) \cup (a \cap y) = a \cap (x \cup y)$, d. h. die Distributivität von a in $F(a, b)$. — Ferner folgt aus $a \cap x = a \cap y$ und $a \cup x = a \cup y$ nach Birkhoff [2]

$$\begin{aligned}x = x \cap (a \cup x) &= x \cap (a \cup y) = (x \cap a) \cup (x \cap y) = (y \cap a) \cup (y \cap x) \\ &= y \cap (a \cup x) = y \cap (a \cup y) = y,\end{aligned}$$

d. h. a ist in $F(a, b)$ kürzbar. —

Ganz entsprechend läßt sich beweisen, daß a genau dann im Gesamtverbande V neutral ist, wenn a in V distributiv und kürzbar ist, und hieraus ergibt sich, daß unsere Erklärung der neutralen Elemente für $M = V$ mit der formal anderen von G. Birkhoff [2] sachlich übereinstimmt. — Den Sonderfall der zerlegenden Konsonanz aber können wir jetzt so beschreiben:

Satz 5. Für irgend zwei Elemente a und b eines Verbandes V gilt: Ist einer der beiden Teilbünde

$$\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}\quad\text{und}\quad\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}$$

ein Teilverband von V, dann ist auch der andere einer und es sind beide Teilverbände identisch. Es fallen aber die beiden Teilbünde genau dann als Teilverband zusammen, wenn a und b in

$$\frac{a\vee b}{a}\wedge\frac{a\vee b}{b}:\frac{a}{a\wedge b}\vee\frac{b}{a\wedge b}$$

neutral sind.

Rückblickend können wir daher sagen: Das Elementepaar (a, b) ist genau dann zerlegend bzw. Konsonanz bzw. zerlegende Konsonanz, wenn a und b in $F(a, b)$ kürzbar bzw. distributiv bzw. neutral sind.

(Eingegangen am 9. Juni 1948.)

Literaturverzeichnis.

H. Hermes und G. Köthe.
Theorie der Verbände, Enzykl. d. Math. Wiss. I 1, 13; 2. Aufl. (1939).

G. Birkhoff.
Neutral elements in general lattices. Bull. American Math. Soc. 46 (1940), S. 702—705.

W. Schwan.
[A 1] Perspektivitäten in allgemeinen Verbänden, Math. Z. 51. 2 (1948), S. 126—134: [A 2] Ein allgemeiner Mengenisomorphiesatz der Theorie der Verbände. Math. Z. 51. 3 (1948), S. 346—354; A [3] Zusammensetzung von Schwesterperspektivitäten in Verbänden. Math. Z. 52. 2 (1948), S. 150—167.

Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen.

Von

Ullrich Kühnel in Rinteln/Weser.

1. Eine Zahl ist bekanntlich dann vollkommen, wenn die Summe ihrer Teiler gleich dem Doppelten der Zahl selbst ist, also

$$\sigma(n) = \sigma\left[\prod p_\nu^{\alpha_\nu}\right] = \prod \frac{p_\nu^{\alpha_\nu+1}-1}{p_\nu-1} = 2n.$$

Über die ungeraden vollkommenen Zahlen ist bisher folgendes bekannt: Sie haben die Form $n = p^\alpha \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \dots q_m^{2\beta_m}$ ($p, q_1, q_2, \dots, q_m$ ungerade Primzahlen: $p \equiv \alpha \equiv 1 \pmod 4$)[1]; mindestens ein $\beta_\varrho > 1$[2]. ja sogar, es ist von den Zahlen β_ϱ mindestens eine $\geqq 3$ oder mindestens zwei $\geqq 2$[3]. Nach Sylvester[4] gehen mindestens 5 verschiedene Primzahlen in n auf. Ich will zeigen, daß mindestens 6 verschiedene Primzahlen in n aufgehen. Es soll also die Unmöglichkeit der Annahme

$$n = p^\alpha \cdot q_1^{2\beta_1} \cdot q_2^{2\beta_2} \cdot q_3^{2\beta_3} \cdot q_4^{2\beta_4}$$

vollkommen oder also die Unmöglichkeit von

$$(1) \qquad 2n = \frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1} \prod_{\nu=1}^{4} \frac{q_\nu^{2\beta_\nu+1}-1}{q_\nu-1}$$

nachgewiesen werden. Aus (1) folgt, wenn man q_0 statt p, γ_0 statt α und γ_ν statt $2\beta_\nu$ schreibt,

$$(2) \qquad \prod_{\nu=1}^{i_0} \frac{q_\nu}{q_\nu-1} \prod_{\nu=i_0+1}^{i_5} \frac{q_\nu^{\gamma_\nu+1}-1}{(q_\nu-1)q_\nu^{\gamma_\nu}} \geqq 2,$$

wobei die Produkte, falls sie leer sind, 1 bedeuten und $i_1, i_2, \dots i_5$ irgendeine Anordnung der Zahlen 0, 1, 2, 3, 4 ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur, falls das erste Produkt leer ist.

[1] L. Euler, Opera postuma vol. I, S. 14—15; vgl. auch L. E. Dickson, History of the theory of numbers, vol. I, S. 19.

[2] R. Steuerwald, Verschärfung einer notwendigen Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Sitz.-Ber. bayer. Akad. Wiss., math.-naturwiss. Kl. (1937), S. 69—72.

[3] H.-J. Kanold, Über eine notwendige Bedingung für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl. Deutsche Mathematik IV (1939), S. 53–57.

[4] J. J. Sylvester, Collected mathematical papers vol. IV, S. 611—614, vgl. auch L. E. Dickson, History of the theory of numbers vol. I, S. 27.

Aus (1) folgt

$$2\,p^{\alpha}\cdot q_1^{2\beta_1}\cdot q_2^{2\beta_2}\cdot q_3^{2\beta_3}\cdot q_4^{2\beta_4}$$

$$(3)\qquad = (1+p)\,(1+p^2+p^4+\cdots+p^{\alpha-1})\prod_{\nu=1}^{4}(1+q_\nu+q_\nu^2+\cdots+q_\nu^{2\beta_\nu}).$$

Daraus ergibt sich, daß $\frac{1+p}{2}$ restlos in $\prod_{\nu=1}^{4} q_\nu^{2\beta_\nu}$ enthalten sein muß. Da jeder Faktor $\frac{q^{\gamma+1}-1}{(q-1)\,q^{\gamma}} > 1$ ist und mit wachsendem γ wächst, genügt es, für die Unmöglichkeit nachzuweisen, daß

$$(4)\qquad \prod_{\nu=1}^{\varrho}\frac{q_\nu^{\gamma_\nu+1}-1}{q_\nu^{\gamma_\nu}(q_\nu-1)} > 2$$

ist für ein festes Wertsystem der γ_ν und wo ϱ eine der Zahlen 3, 4 oder 5 bedeutet, und außerdem nachzuweisen, daß für alle Wertsysteme mit niedrigeren Exponenten die Zahl n nicht vollkommen sein kann.

(2) ergibt nun bereits, daß in einer nur aus 5 verschiedenen Primzahlen bestehenden Zahl die 3 auftreten muß $\left(\text{denn } \frac{5.7.11.13.17}{4.6.10.12.16} < 2\right)$. Außerdem folgt, daß als zweite Primzahl 5 oder 7 auftreten muß. Der einzige, sonst noch mit (2) vereinbare Fall $n = 3^{\alpha}.11^{\beta}.13^{\gamma}.17^{\delta}.19^{\varepsilon}$ scheidet, wie wir bald sehen werden, leicht aus. Übrigens können nicht 5 und 7 auftreten. Denn es ist bereits

$$\frac{3^3-1}{2.3^2}\cdot\frac{5^2-1}{4.5}\cdot\frac{7^3-1}{6.7^2} = \frac{13}{9}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{57}{49} > 2.$$

Es ist also keine vollkommene Zahl $\equiv 0 \pmod{105}$ [5]).

2. $n = 3^{\alpha}.11^{\beta}.13^{\gamma}.17^{\delta}.19^{\varepsilon}$. 17 kann nur in $\frac{\pi^{l+1}-1}{\pi-1}$ aufgehen, falls $l+1$ ungerade und gleichzeitig $\pi \equiv 1 \pmod{17}$ oder $l+1$ gerade und gleichzeitig $\pi \equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist. Denn bei $\pi \not\equiv 1 \pmod{17}$ kann nur eine gerade Potenz $\equiv 1 \pmod{17}$ werden, bei $\pi \not\equiv \pm 1 \pmod{17}$ nur eine durch 4 teilbare, was bei l ungerade wegen $l+1 \equiv 2 \pmod 4$ nicht möglich ist. Da keine der Zahlen $3, 11, 13, 19 \equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist, ist

$$17 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2}\cdot\frac{11^{\beta+1}-1}{10}\cdot\frac{13^{\gamma+1}-1}{12}\cdot\frac{17^{\delta+1}-1}{16}\cdot\frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18},$$

also n nicht vollkommen.

3. $n = 3^{\alpha}.7^{\beta}.q_2^{\gamma}.q_3^{\delta}.q_4^{\varepsilon}$. Nach (2) ergeben sich in diesem Falle die folgenden Möglichkeiten:

---

[5]) Das ist natürlich schon längst bekannt, ebenso die in dieser Arbeit nicht benutzte Tatsache, daß es keine ungeraden vollkommenen Zahlen gibt, die $\equiv 2 \pmod 3$ sind. (Pepin, Memorie della Pontificia Accademia dei Nuovi Lincei **13** (1897). S. 345—420.)

n_ν	q_2	q_3	q_4
n_1	11	13	beliebig
n_2		17	
n_3		19	
n_4		23	
n_5		29	< 320 (41, 53, 97, 173, 197, 241, 293)
n_6		31	< 185 (41, 53, 61, 97)
n_7		37	< 93 (41, 53, 73)
n_8		41	< 75
n_9		43	< 69 (53)
n_{10}		47	< 61 (53)
n_{11}	13	17	beliebig
n_{12}		19	
n_{13}		23	< 112
n_{14}		29	< 55
n_{15}		31	< 49
n_{16}	17	19	< 54
n_{17}		23	< 36
n_{18}	19	23	29

n_{18} schaltet nach (3) aus, da $q_4 = 29$ die Primzahlen 3 und 5 verlangen würde. n_{16} und n_{17} schalten aus, da keine Primzahl $\equiv \pm 1 \pmod{17}$ mehr möglich ist. Bei $n_5, n_6, n_7, n_9, n_{10}$ ergeben sich nach (3) die in Klammern stehenden Einschränkungen für q_4.

Die Erledigung der einzelnen Fälle gestaltet sich nun ziemlich einfach, denn fast in allen Fällen ist bereits

$$(5) \qquad \frac{3^{\alpha+1}-1}{2\cdot 3^{\alpha}} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6\cdot 7^{\beta}} \cdot \frac{q_2^{\gamma+1}-1}{q_2^{\gamma}(q_2-1)} \cdot \frac{q_3^{\delta+1}-1}{q_3^{\delta}(q_3-1)} > 2$$

für ziemlich niedrige Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, so daß nach (4) nur wenige Unterfälle zu untersuchen bleiben, bei denen gewöhnlich die Anwendung von (3) zum Widerspruch führt.

So ist bei n_2, n_3 (5) schon für $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ erfüllt, bei n_4 (5) schon für $\alpha = 4$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, $\delta = 2$; bei n_2, n_3 scheidet aber $\alpha = 2$ aus, da es die Primzahl 13 in n_2, n_3 erfordern würde, bei n_4 würde $\alpha = 2$ 13, $\beta = 2$ die Primzahl 19 erfordern. Bei n_{11} ist (5) mit $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ bzw. mit $\alpha = 6$, $\beta = 4$, $\gamma = 1$, $\delta = 2$ erfüllt. $\alpha = 4$ würde nach (3) 11 erfordern. Bei $\alpha = 2$ folgte aus

$$2 = \frac{3^3-1}{2\cdot 3^2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6\cdot 7^{\beta}} \cdot \frac{13^{\gamma+1}-1}{12\cdot 13^{\gamma}} \cdot \frac{17^{\delta+1}-1}{16\cdot 17^{\delta}} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1)\cdot p^{\varepsilon}}$$

$$< \frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{p}{p-1} \quad : p < 34,$$

aber kein $p < 34$ ist $\equiv \pm 1 \pmod{17}$.

Schließlich würde $\beta = 2$ $q = 19$ erfordern, das wieder $\not\equiv \pm 1 \pmod{17}$ ist. Charakteristisch für die Erledigung der meisten anderen Fälle ist n_5, der deshalb genauer betrachtet werde.

$$n_5 = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 29^\delta \cdot p^\varepsilon \quad (p < 320;\ p = 41, 53, 97, 173, 197, 241, 293).$$

Es muß $\alpha \geqq 4$, $\beta \geqq 4$, $\gamma \geqq 4$ sein, da sonst 13 oder 19 auftreten müßten. Für $p \leqq 97$ ist bereits

$$\frac{3^5-1}{2 \cdot 3^4} \cdot \frac{7^5-1}{6 \cdot 7^4} \cdot \frac{11^3-1}{10 \cdot 11^2} \cdot \frac{29^2-1}{28 \cdot 29} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1)p^\varepsilon} \geqq \frac{121 \cdot 2801 \cdot 133 \cdot 30 \cdot 98}{81 \cdot 2401 \cdot 121 \cdot 29 \cdot 97} > 2,$$

demnach nur noch $p = 173, 197, 241, 293$ möglich.

3, 7, 11, 29 sind primitive Kongruenzwurzeln mod 293, daher

$$293 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{11^{\gamma+1}-1}{10} \cdot \frac{29^{\delta+1}-1}{28},$$

da ja $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ gerade sind. Auch 241 schaltet aus, da, wie man leicht feststellt, nur gerade Potenzen dieser Primzahlen $\equiv 1 \pmod{241}$ werden können.

Nun ist

$$3 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\ 11 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\ 29 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},$$

$$173 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},\ 197 \nmid \frac{11^{\gamma+1}-1}{10},$$

daher müßte $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10} = 7^{\beta_1}$ mit $\beta_1 > 0$ werden. Das geht aber nur für $\gamma + 1 \equiv 3 \pmod 6$, andererseits ist $11^3 \equiv 1 \pmod{19}$, demnach auch immer $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10}$ durch 19 teilbar, so daß auch 19 in n_5 vorkommen müßte.

Die gleiche Überlegung gilt nun für die Fälle n_6—n_{10}. In allen Fällen stellt man fest, daß das Produkt der möglichen Primzahlen zu $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10}$ teilerfremd ist und daher, wie eben geschlossen, 19 auftreten müßte. Nur der Fall $3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 41^\delta \cdot 43^\varepsilon$ wäre noch denkbar. Denn dort wird $11^7 \equiv 1 \pmod{43}$. Andererseits ist $\frac{11^7-1}{10} = 42 \cdot 45319$, und 45319 ist durch keine der Primzahlen 3, 7, 11, 41, 43 teilbar. Daher muß auch stets $\frac{11^{\gamma+1}-1}{10} = \frac{11^{7m}-1}{10}$ durch 45319 teilbar sein, und die Primfaktoren von 45319 müßten in n_8 auftreten. Die anderen Fälle sind etwas langwieriger. Hier möge noch n_1 und n_{12} betrachtet werden.

$$n_1 = 3^\alpha \cdot 7^\beta \cdot 11^\gamma \cdot 13^\delta \cdot p^\varepsilon.$$

(5) ist mit $\alpha = 4$, $\beta = 2$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$ erfüllt. Daher bleibt nur $\alpha = 2$. Es ist $\beta \geqq 4$, $\gamma \geqq 4$, da sonst 19 auftreten würde. Und da 7, 13, 19 primitive Kongruenzwurzeln mod 11 sind, wäre

$$11 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18}.$$

und zeitigstens

$$11 \mid \frac{13^{10}-1}{12},$$

also $\delta \geqq 9$. Andererseits sind 7, 11, 19 primitive Kongruenzwurzeln mod 13, also

$$13^2 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{11^{\gamma+1}-1}{10} \cdot \frac{19^{\varepsilon+1}-1}{18}.$$

Da aber (5) mit $\alpha = 2$, $\beta = \gamma = 4$, $\delta = 2$ bereits erfüllt ist, bleibt nur $\delta = 1$ übrig. Aus

$$\frac{13}{9} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{p}{p-1} > 2$$

folgt $p < 540$. Da aber $\beta = 4$ die Primzahl $2801 > 540$ fordern würde, ist $\beta \geqq 6$. Aber es ist

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{13^2-1}{12.13} \cdot \frac{7^7-1}{6.7^6} \cdot \frac{11^5-1}{10.11^4} \cdot \frac{p^{\varepsilon+1}-1}{(p-1)p^{\varepsilon}}$$
$$> \frac{13}{9} \cdot \frac{14}{13} \cdot \frac{7^7-1}{6.7^6} \cdot \frac{11^5-1}{10.11^4} \cdot \frac{523^2-1}{522.523} > 2$$

$n_{12} = 3^{\alpha} . 7^{\beta} . 13^{\gamma} . 19^{\delta} . p^{\varepsilon}$.

(5) ist mit $\alpha = 8$, $\beta = 4$, $\gamma = 5$, $\delta = 2$ erfüllt. $\alpha = 2$ ergibt nach (2) $p < 28$, also $p = 23$. Da

$$13^2 \nmid \frac{13^{\gamma+1}-1}{12} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\delta+1}-1}{18} \cdot \frac{23^{\varepsilon+1}-1}{22} \cdot \frac{3^3-1}{2},$$

wäre $\gamma = 1$. Aber

$$23 \nmid \frac{3^3-1}{2} \cdot \frac{13^2-1}{12} \cdot \frac{7^{\beta+1}-1}{6} \cdot \frac{19^{\delta+1}-1}{18},$$

$\alpha = 4$ würde $p = 11$ erfordern.

$\alpha = 6$ ergibt wegen

$$\frac{3^7-1}{2} = 1093 \quad p = 1093; \quad \beta = 2 \text{ gäbe nach (2) } p < 428$$
$$\gamma = 1 \text{ gäbe nach (2) } p < 188.$$

Daher $\beta \geqq 4$ $\gamma \geqq 2$. Aber es ist

$$\frac{3^7-1}{2.3^6} \cdot \frac{7^5-1}{6.7^4} \cdot \frac{13^3-1}{12.13^2} \cdot \frac{19^3-1}{18.19^2} \cdot \frac{1093^2-1}{1092.1093} > 2.$$

Ähnliche Überlegungen führen dazu, die Fälle $\beta = 2$ (bei dem Unmöglichkeitsbeweis müssen die Unterfälle γ gerade, γ ungerade ($= 1$, $= 5$) gesondert betrachtet werden), $\gamma = 1$, $\gamma = 2$, $\gamma = 4$ auszuschalten und so die Unmöglichkeit von n_{12} nachzuweisen.

Die restlichen Fälle führen auf ähnliche Überlegungen wie bei n_5. Man schränkt die Möglichkeiten für die letzte Primzahl immer mehr ein und führt die einzelnen Unterfälle nach entsprechenden Überlegungen zum Widerspruch.

4. Ist $5/n_\nu$ so ist (3) für die Einschränkung der möglichen Primzahlen nicht sehr nützlich, da ja immer 5 den ungeraden Exponenten haben könnte. Dagegen ist der folgende Hilfssatz von KANOLD[3]) folgenreich: *Ist a eine beliebige natürliche Zahl und p eine ungerade Primzahl, so ist $b = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{p-1}$, außer etwa durch p, nur durch Primzahlen der Form $q = px + 1$ teilbar. Im Falle der Teilbarkeit durch p ist b nicht durch p^2 teilbar.*

Aus diesem Hilfssatz ziehen wir eine Folgerung. Es sei π eine ungerade Primzahl $\equiv 1 \pmod 5$, also $\equiv 1 \pmod{10}$. $\pi^5 - 1 = (1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4)(\pi - 1)$ kann nur teilbar sein durch die Primzahlen, die in $\pi - 1$ aufgehen und durch die Primzahlen, die in $1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4$ aufgehen, also, da $\pi \equiv 1 \pmod 5$ und nach dem KANOLDschen Hilfssatz, durch 5 und durch Primzahlen der Form $t \equiv 1 \pmod{10}$. Es sei $\pi - 1 = r_1 . r_2 \ldots r_l$, wobei die r_ν die in $\pi - 1$ aufgehenden Primfaktoren seien, mehrfache mehrfach gezählt. Dann kann also geschrieben werden

$$\pi^5 \equiv 1 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s . r_1 . r_2 \ldots r_l},$$

also

$$\pi^{5m} \equiv 1 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s . r_1 r_2 \ldots r_l};$$

daher

$$\frac{\pi^{5m} - 1}{\pi - 1} \equiv 0 \pmod{5 t_1 t_2 \ldots t_s}.$$

Dabei tritt mindestens ein t_ν wirklich auf, da $1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4$ den Primfaktor 5 höchstens in der ersten Potenz enthält. Geht nun $q_\varrho = 5$ in n_ν auf, so muß 5 in einem Faktor $\frac{q^{\varphi+1} - 1}{q - 1}$ aufgehen. Da zeitigstens $1^1 \equiv 1 \pmod 5$, $2^4 \equiv 1 \pmod 5$, $3^4 \equiv 1 \pmod 5$, $4^2 \equiv 1 \pmod 5$ ist und da $\varphi + 1$ entweder ungerade oder von der Form $4m + 2$ ist, kann 5 nur dann in $q^{\varphi+1} - 1$ aufgehen, wenn entweder $q \equiv 1 \pmod{10}$ oder $q \equiv 4 \pmod 5$ und $\varphi + 1$ gerade, also φ ungerade, demnach $q \equiv 1 \pmod 4$ wird. Das ergibt also $q \equiv 9 \pmod{20}$. Wegen

$$\frac{q^{\varphi+1} - 1}{q - 1} = 1 + q + \cdots + q^\varphi$$

muß im Falle $q \equiv 1 \pmod 5$ $\varphi \equiv 4 \pmod 5$ sein, d. h. aber, es wäre $\varphi + 1 = 5m$, oder also $5/\frac{q^{5m} - 1}{q - 1}$ oder $5/q^{5m} - 1$.

Wegen des eben hergeleiteten Ergebnisses enthält aber $\frac{q^{5m} - 1}{q - 1}$ mindestens eine weitere Primzahl $t \equiv 1 \pmod{10}$, so daß sich ergibt:

Ist $q_\varrho = 5/n_\nu$, so tritt in n_ν noch entweder eine Primzahl der Form $\equiv 9 \pmod{20}$ mit ungeradem Exponenten auf oder noch mindestens zwei Primzahlen der Form $\equiv 1 \pmod{10}$.

Im Falle $q \equiv 9 \pmod{20}$, φ ungerade ist in

$$n_\nu = 3^\alpha . 5^\beta . q_1^\gamma . q_2^\delta . q^\varphi \quad \beta \geqq 2.$$

Wäre jetzt $5/\frac{q_1^{\gamma+1} - 1}{q_1 - 1}$ oder $5/\frac{q_2^{\delta+1} - 1}{q_2 - 1}$, so müßte q_1 bzw. q_2 die Form

$\equiv 1 \pmod{10}$ haben (es können ja nicht zwei Primzahlen mit ungeradem Exponenten auftreten!). Dann wäre wieder $\gamma \equiv 4 \pmod 5$ bzw. $\delta \equiv 4 \pmod 5$, also $5 \mid \frac{q_i^{5m}-1}{q_i-1}$ $(i = 1, 2)$, also müßte dann noch eine weitere Primzahl $\equiv 1 \pmod{10}$ auftreten. Ist aber $5 \nmid \frac{q_1^{\gamma+1}-1}{q_1-1} \cdot \frac{q_2^{\delta+1}-1}{q_2-1}$, so müßte wegen $\beta \geqq 2$ und da von selbst $5 \nmid \frac{3^{\alpha+1}-1}{2} \cdot \frac{5^{\beta+1}-1}{4}$ ist, $5^\beta \mid \frac{q^{\varphi+1}-1}{q-1}$ sein. Wenn $q \not\equiv -1 \pmod{5^\beta}$ ist, geht das nur, falls $\varphi + 1 \equiv 10 \pmod{20}$ wird; denn $q^x \equiv 1 \pmod{5^\beta}$ kann zeitigstens eintreten für $x \mid \varphi(5^\beta)$ (φ = Eulersche Funktion), also $x/4 \cdot 5^{\beta-1}$. Demnach hat x die Form $2^\chi \cdot 5^\psi$ mit $\chi = 0, 1, 2$; $\psi = 0, 1, \ldots \beta - 1$. Wegen $q + 1 \not\equiv 0 \pmod{5^\beta}$ kann also $\varphi + 1$ nie die Form $10m + \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 8 \end{cases}$ haben, sondern nur die Form $\varphi + 1 = 10m$. (Man beachte $\varphi + 1 \equiv 2 \pmod 4$!). Da nun $\frac{q^{10}-1}{q-1}$ mindestens eine Primzahl der Form $t \equiv 1 \pmod{10}$ enthält, muß also in diesem Falle noch mindestens eine solche Primzahl in n_ν aufgehen. Ist dagegen $q \equiv -1 \pmod{5^\beta}$, dann genügt $\frac{q^2-1}{q-1} = q + 1$; dann können q_1 und q_2 beliebig sein. Daraus ergibt sich also:

Ist $q_\varrho = 5 \mid n_\nu$ und tritt in n_ν noch eine Primzahl q der Form $\equiv 9 \pmod{20}$ auf (mit ungeradem Exponenten), so ist entweder $q \equiv -1 \pmod{5^\beta}$, oder es tritt in n_ν noch eine Primzahl $\equiv 1 \pmod{10}$ auf.

Auf Grund dieser beiden Ergebnisse und auf Grund von (2) und (3) ergeben sich nun die folgenden Möglichkeiten für $n_\nu = 3^\alpha \cdot 5^\beta \cdot q_1^\gamma \cdot q_2^\delta \cdot q_3^\varepsilon$.

n_ν	q_1	q_2	q_3
n_{19}	11	beliebig	beliebig
n_{20}	13		
n_{21}	17	beliebig	$(q_2 \cdot q_3 < 256\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{22}	19	beliebig	$(q_2 \cdot q_3 < 96\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{23}	23	beliebig	$(7q_2 \cdot q_3 < 352\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{24}	29	beliebig	$(13q_2 \cdot q_3 < 448\,(q_2 + q_3 - 1))$
n_{25}	31	37	< 231(41, 61, 71, 89, 101, 131, 149, 151, 181, 191, 211)
n_{26}		41	< 143
n_{27}		43	< 123(61, 71, 89, 101, 109)
n_{28}		47	< 99(61, 71, 89)
n_{29}		53	$\leqq 79$(61, 71)
n_{30}		59	< 69(61)
n_{31}	37	41	< 81(61, 71)
n_{32}		43	< 75(unmöglich, da kein $q \equiv 9 \pmod{20} < 75$ mehr vorhanden)
n_{33}		47	< 65(unmöglich, da kein $q \equiv 9 \pmod{20} < 65$ mehr vorhanden)
n_{34}	41	43	< 62(61)

Als Paradigma für den Unmöglichkeitsbeweis der einzelnen Fälle wähle ich $n_{20} = 3^\alpha . 5^\beta . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$.

α kann nicht 4 sein, da sonst 11 vorkommen müßte. Bei $\alpha = 6$ wäre bereits

$$\frac{3^7-1}{2.3^6} \cdot \frac{5^3-1}{4.5^2} \cdot \frac{13^2-1}{12.13} = \frac{237181}{236925} \cdot 2 > 2.$$

Daher bleiben nur die Fälle

(1) $$n_{20} = 3^\alpha . 5 . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$$

(2) $$n_{20} = 3^2 . 5^\beta . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$$

zu betrachten.

(1) Es müßte $\gamma \equiv \delta \equiv \varepsilon \equiv 0 \pmod 2$ sein, daher nach dem vorletzten Ergebnis $p \equiv q \equiv 1 \pmod{10}$ und δ oder $\varepsilon \equiv 4 \pmod{10}$.

Aus

$$2 = \frac{3^{\alpha+1}-1}{2 \cdot 3^\alpha} \cdot \frac{5^2-1}{4.5} \cdot \frac{13^{\gamma+1}-1}{12.13^\gamma} \cdot \frac{p^{\delta+1}-1}{(p-1).p^\delta} \cdot \frac{q^{\varepsilon+1}-1}{(q-1)q^\varepsilon} < \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1}$$

$$= \frac{39}{20} \cdot \frac{pq}{(p-1)(q-1)}$$

ergibt sich $pq < 40(p+q-1)$, was zu folgender Aufspaltung führt:

p	q
31	$\equiv 1 \pmod{10}$
41	< 1600, $\equiv 1 \pmod{10}$
61	< 115, $\equiv 1 \pmod{10}$; also $q = 71, 101$
71	< 91, $\equiv 1 \pmod{10}$; fällt also bereits aus.

$p = 31$. Wenn $\alpha \geqq 6$ ist, so wird bereits

$$\frac{3^7-1}{2.3^6} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{13^3-1}{12.13^2} \cdot \frac{31^3-1}{30.31^2} = \frac{22068763}{21925215} \cdot 2 > 2.$$

Daher müßte $\alpha = 2$ werden. Nun folgt aber aus

$$2 = \frac{13}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{13^{\gamma+1}-1}{12.13^\gamma} \cdot \frac{31^{\delta+1}-1}{30.31^\delta} \cdot \frac{q^{\varepsilon+1}-1}{(q-1)q^\varepsilon} < \frac{13}{9} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{31}{30} \cdot \frac{q}{q-1} \quad q < 34,$$

und das geht nicht mehr.

$p = 41$. Falls $5 \mid \frac{41^{\delta+1}-1}{40}$ wäre, müßte $\frac{41^5-1}{40} = 5.579281 = 5.q^2$ oder $= 5.q^3$ sein. Denn es ist $5.q^4 \geqq 5.61^4 > 5.579281$. Aber 579281 ist weder Quadrat- noch Kubikzahl. Demnach müßte für eine der Primzahlen $q \equiv 4 \pmod{10}$ werden, oder also, es müßte $\frac{q^5-1}{q-1} = 5.41^{\delta_1}$ werden mit $\delta_1 \geqq 2$.

Die Primzahlen q: 71, 101, 191, 251, 311, 401, 421, 521, 631, 641, 691, 751, 911, 1021, 1061, 1171, 1181, 1291, 1301, 1511, 1571 fallen aus, da bei ihnen jedesmal $\frac{q^5-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{11}$ ist. Verlangt man nun $\frac{q^5-1}{q-1} \equiv 0 \pmod{41}$, so bleiben von den q mit $61 \leqq q < 1600$ nur q: 461, 821, 1231, 1451. Aber keins dieser q erfüllt $q^5 - 1 \equiv 0 \pmod{41^2}$.

$p = 61$. $\frac{71^5-1}{70} \equiv 0 \pmod{11}$, daher wäre nur $\frac{61^5-1}{60}$ bzw. $\frac{101^5-1}{100}$ zu versuchen. Es ist aber $61^5-1 \not\equiv 0 \pmod{71.101}$ und $101^5-1 \not\equiv 0 \pmod{61}$.

(2) $n_{20} = 3^\alpha . 5^\beta . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$ mit $\beta \geqq 2$, da $3^\alpha . 5 . 13^\gamma . p^\delta . q^\varepsilon$ bereits erledigt ist. Aus $\frac{13}{9} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1} > 2$ folgt $19pq < 864(p+q-1)$, was unter Zuhilfenahme der aus dem KANOLDschen Satz folgenden Ergebnisse die folgende Aufspaltung ergibt:

p	q
17, 19, 23	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
29	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$ mit $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
31	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$
37	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
41	beliebig, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$
43	beliebig, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade
47	< 1371, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q \equiv -1 \pmod{25}$. $q \equiv 1 \pmod 4$, d. h. $q \equiv 49 \pmod{100}$, also $q = 149, 449$ 1249 ($q = 349, 1049$ würde 7_ε erfordern)
53	< 315, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q = 149$
59	< 195, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, also $q = 149$
61	< 176, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$, also $q = 71, 89, 101,$ $131, 149, 151$
67	< 140, $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, fällt also aus
71	< 125, $\equiv 1 \pmod{10}$ oder $\equiv 9 \pmod{20}$, also $q = 89, 101$
73, 79, 83	$< 119, 106, 100$ $\equiv -1 \pmod{5^\beta}$, ε ungerade, fallen aus
89	< 92, fällt also aus.

Für $p = 17, 19, 23, 29, 31$ müßte $\delta \geqq 2$ werden. (Bei 29, weil $29 \not\equiv -1 \pmod{5^\beta}$ ist.) Aber es ist

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{5^3-1}{4.5^2} \cdot \frac{13^3-1}{12.13^2} \cdot \frac{p^3-1}{(p-1)p^2} \geqq \frac{13}{9} \cdot \frac{31}{25} \cdot \frac{183}{169} \cdot \frac{993}{31^2} > 2$$

für $p = 17, 19, 23, 29, 31$. Da $\beta = 2$ immer $p = 31$ erfordern würde, müßte also $\beta \geqq 4$ werden.

Für $p = 37$ und $p = 41$ wird bereits

$$\frac{3^3-1}{2.3^2} \cdot \frac{5^4-1}{4.5^3} \cdot \frac{13^3-1}{12 \cdot 13^2} \cdot \frac{p^3-1}{(p-1)p^2} \geqq \frac{13}{9} \cdot \frac{156}{125} \cdot \frac{183}{169} \cdot \frac{41^3-1}{41^2 . 40} > 2.$$

Für $p = 43$ wird

$$\frac{3^3-1}{2.3^2}\cdot\frac{5^5-1}{4.5^4}\cdot\frac{13^3-1}{12.13^2}\cdot\frac{43^3-1}{42.43^2}>2.$$

Für $p = 47$ müßte bei $q = 149$ und $q = 449$ $\beta = 2$ werden. Denn $\left.\begin{matrix}149^x\\449^x\end{matrix}\right\} \equiv 1 \pmod{5^3}$ frühestens für $x/\varphi(5^3)$ oder $x/4.5^2$. Wegen $\left.\begin{matrix}149^2\\449^2\end{matrix}\right\} \not\equiv 1 \pmod{5^3}$ wird $x > 2$, und da $x = 4$ wegen $\varepsilon = mx \equiv 2 \pmod 4$ ausgeschlossen ist, bleibt x ein Vielfaches von 5. Dann müßte aber wieder eine Primzahl der Form $\equiv 1 \pmod{10}$ auftreten. $\beta = 2$ aber erfordert $p = 31$, was ja nicht geht.

Aus ähnlichen Gründen ist im Falle $p = 47$, $q = 1249$ $\beta = 4$ ($\varphi(5^5) = 4.5^4$, $1249^2 \not\equiv 1 \pmod{5^5}$, also ε ein Vielfaches von 5); aber $\beta = 4$ würde $p = 11$ erfordern.

Genau so kommen die Fälle $p = 53$, $p = 59$ in Fortfall, da sie $\beta = 2$ erfordern würden.

$p = 61$, $q = 71, 89, 101, 131, 149, 151$.

Es ist $61^5 - 1 = 5.131.21491$ und 131 ist zu 21491 teilerfremd. Daher muß $\varepsilon + 1$ ein Vielfaches von 5 werden. (Bei $q = 149$ würde sonst wieder $\beta = 2$ erforderlich werden!). Aber es ist $71^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

Und $\left.\begin{matrix}89^5\\101^5\\149^5\\151^5\end{matrix}\right\} \not\equiv 1 \pmod{61}$ und $131^5 - 1 \equiv 0 \pmod{61^2}$ (61 kann ja nicht in erster Potenz auftreten, da das wegen $1 + p = 2.31$ 31 erfordern würde.)

Schließlich müßte bei $p = 71$, $q = 89, 101$ $\varepsilon = 5r$ sein, da $71^5 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$ ist. Aber es ist $89^5 \not\equiv 1 \pmod{71}$ und $101^5 \not\equiv 1 \pmod{71}$.

Also kann n_{20} nicht vollkommen sein.

Die anderen Fälle mit $5/n_\nu$ erledigen sich ähnlich. Aus Platzmangel muß die genaue Beweisführung hier unterbleiben.

Es gibt daher keine ungeraden vollkommenen Zahlen, die nur 5 verschiedene Primfaktoren enthalten. Die Anzahl der verschiedenen Primfaktoren, die in einer ungeraden vollkommenen Zahl auftreten, ist daher $\geqq 6$. Demnach ist die kleinste ungerade vollkommene Zahl, wenn man noch die Kanoldschen Sätze berücksichtigt,

$$n \geqq 3^6.5^2.11^2.13^2.17.19^2 > 2,2.10^{12}.$$

(Eingegangen am 25. Januar 1948.)

Über konvexe Körper mit Flachstellen.

Von

H. Hadwiger in Bern.

Verschiedentlich waren konvexe Körper mit Ecken Gegenstand einläßlicherer Untersuchungen. So hat A. Dinghas [1]) eine exakte Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für solche konvexe Körper angegeben, für die eine Anzahl (endlich- oder abzählbar-viele) Ecken vorgeschriebenen Eckenmaßes vorgegeben sind. — Als Eckenmaß diente hier der Öffnungswinkel des kleinsten konvexen Rotationskegels, dessen Spitze sich im Eckpunkt befindet und der den Körper ganz enthält. Die Ungleichung von Dinghas ist insofern exakt, als diese für die Kappenkörper der Kugel, welche den gestellten Eckenbedingungen genügen, zu einer Gleichung wird.

Damit ist eine Extremaleigenschaft der Kappenkörper dargetan, nämlich unter allen konvexen Körpern gleichen Volumens, welche der gestellten Eckenbedingung genügen, die kleinst mögliche Oberfläche aufzuweisen. Es ist an dieser Stelle instruktiv, sich die bekannte Tatsache in Erinnerung zu rufen, daß nach H. Minkowski [2]) und G. Bol [3]) die Kappenkörper genau diejenigen Extremalkörper sind, welche bei gegebenen Volumen und gegebener Oberfläche das größte Integral der mittleren Krümmung besitzen.

Wenn wir uns in dieser Note mit konvexen Körpern mit Flachstellen auseinandersetzen wollen, so möchte doch vorerst erwähnt werden, daß die Flachstelle in gewissem Sinne der Ecke dual entspricht, insofern nämlich, als man unter einer Ecke eines dreidimensionalen [4]) konvexen Körpers einen Randpunkt versteht, durch welchen drei unabhängige Stützebenen gelegt werden können, während wir unter

[1]) A. Dinghas, Verschärfung der isoperimetrischen Ungleichung für konvexe Körper mit Ecken. Math. Z. **47**, 1940, 669–675.

[2]) [3]) H. Minkowski (Volumen und Oberfläche. Ges. Abh., Bd. **2**, 230—276, § 7) hat die Tatsache erkannt, daß jedenfalls die Kappenkörper der Kugel die erwähnte Extremaleigenschaft aufweisen. Das Resultat, daß diese Körper die einzigen dieser Art sind, verdankt man G. Bol (Beweis einer Vermutung von H. Minkowski. Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hansischen Universität, **15**. 1943, 37—56).

[4]) Es ist leicht einzusehen, daß die Resultate der vorliegenden Arbeit mühelos auf n-dimensionale konvexe Körper ($n \neq 3$) ausgedehnt werden können. Die Beschränkung auf den Fall $n = 3$ erlaubt indessen eine einfachere und anschaulichere Darlegung.

einer Flachstelle eine Stützebene verstehen wollen, welche drei unabhängige Randpunkte des Körpers enthält. Der einer solchen Stützebene mit dem Körperrand gemeinsame Oberflächenteil stellt einen ebenen konvexen Bereich mit (zweidimensional) inneren Punkten dar. Dieser Bereich sei die eigentliche Flachstelle.

Als Flachstellenmaß wollen wir den Inkreisradius dieses ebenen konvexen Bereiches wählen. Er sei im Folgenden kurz Flachradius genannt.

Im erörterten dualen Sinn kann man dem Kappenkörper der Kugel wohl den Kalottenkörper der Kugel zuweisen. Dieser entsteht so, daß man von einer Kugel (endlich- oder abzählbar-viele) Kalotten, die sich gegenseitig nicht stören, abschneidet. Die Radien der Schnittkreise sind hier als Flachradien deutbar.

Es ist sicher lohnend, dieses duale Verhältnis weiter zu verfolgen, da man mit Recht erwarten darf, daß sich hierbei wertvolle Anregungen und Aufschlüsse ergeben können.

In der vorliegenden Arbeit werden in einfacher Weise einige Resultate erreicht, welche zeigen, daß in der Tat die Kugelkalottenkörper unter den konvexen Körpern mit Flachstellen die entsprechende Bedeutung haben, wie die Kugelkappenkörper unter denjenigen mit Ecken. Genauer werden wir Folgendes zeigen:

Es sei A_0 ein Kalottenkörper der Kugel mit den n Flachradien $r_\nu^0 (\nu = 1, 2, \ldots . n)$. Es bezeichne V_0 das Volumen, F_0 die Oberfläche und M_0 das Integral der mittleren Krümmung von A_0. Ferner sei A ein weiterer konvexer Körper mit n Flachradien $r_\nu (\nu = 1, 2, .. n)$ und es sei $r_\nu^0 \leqq r_\nu$. V, F und M sollen die entsprechenden Maßzahlen des Körpers A bezeichnen. Falls

(I) $$V_0 = V,$$

d. h. unter der Bedingung der Volumgleichheit von A und A_0, ist

(Ia) $$F_0 \leqq F,$$

und auch

(Ib) $$M_0 \leqq M.$$

Es gilt somit der folgende

Satz: *Unter allen mit einem Kalottenkörper der Kugel volumgleichen konvexen Körpern mit gleich vielen Flachradien, welche nicht kleiner als die entsprechenden des Kalottenkörpers sind, besitzt der letztere die kleinste Oberfläche und auch das kleinste Integral der mittleren Krümmung.*

Die drei Maßzahlen des Kalottenkörpers sind

(II) $$V_0 = \frac{4\pi R^3}{3}\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_1^n (2 - 3\cos\alpha_\nu + \cos^3\alpha_\nu)\right\}$$

$$F_0 = 4\pi R^2\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_1^n (1 - 2\cos\alpha_\nu + \cos^2\alpha_\nu)\right\} \tag{IIa}$$

$$M_0 = 4\pi R\left\{1 - \frac{1}{4}\sum_1^n (2 - 2\cos\alpha_\nu - \alpha_\nu \sin\alpha_\nu)\right\}, \tag{IIb}$$

wobei R den Radius der Kugel bezeichnet und der Hilfswinkel α_ν durch den Ansatz

$$\sin\alpha_\nu = \frac{r_\nu^0}{R} \tag{III}$$

erklärt ist. Für $r_\nu^0 < R$ ist in der den Hilfswinkel α_ν bestimmenden Gleichung (III) die spitzwinklige bzw. die stumpfwinklige Lösung zu wählen, je nachdem die Ebene des entsprechenden Kalottenkreises Kugelmittelpunkt und Kalottenkörper nicht trennt bzw. trennt.

Wir beweisen jetzt unter der Voraussetzung (I) die Aussagen (Ia) und (Ib) d. h. die Behauptungen des Satzes.

Es sollen zunächst A und B zwei beliebige konvexe Körper bezeichnen. Das Produkt AB (Durchschnitt) ist entweder leer oder selbst wieder ein konvexer Körper; die Summe $A + B$ (Vereinigungsmenge) ist i. a. nicht konvex. In allen Fällen gilt die folgende Volumformel

$$V(A) + V(B) = V(A + B) + V(AB). \tag{1}$$

Es sollen weiter A_ϱ und B_ϱ für $\varrho > 0$ die äußeren Parallelkörper von A und B im Abstand ϱ darstellen. Der äußere Parallelkörper eines konvexen Körpers wird wie bekannt so erhalten, daß man die Vereinigungsmenge aller abgeschlossenen Kugeln vom Radius ϱ bildet, deren Mittelpunkte sich im Ausgangskörper befinden. Der Parallelkörper ist wieder konvex. — Unmittelbar der Definition ist zu entnehmen, daß

$$A_\varrho B_\varrho \supseteq (AB)_\varrho \tag{2}$$

gilt. Falls aber $A + B$ konvex ist, gilt indessen schärfer als (2)

$$A_\varrho B_\varrho = (AB)_\varrho. \tag{3}$$

In der Tat: Ist nämlich p ein Punkt von $A_\varrho B_\varrho$, so gibt es zwei Punkte $a \in A$ und $b \in B$ so, daß $a \in P_\varrho$ und $b \in P_\varrho$ ist, wobei P_ϱ die Kugel um p vom Radius ϱ bezeichnet. Da nun $A + B$ nach Voraussetzung konvex ist, gehört die ganze Verbindungsstrecke von a nach b zu $A + B$. Da weiter A und B abgeschlossen sind, gibt es auf dieser Strecke offenbar einen Punkt q, der zu AB gehört. Wegen der Konvexität der Kugel P_ϱ gilt demnach auch $q \in P_\varrho$. Hieraus folgert man, daß $p \in (AB)_\varrho$ gilt. Da dies für alle p der eingangs erwähnten Bedingung richtig ist, folgt $A_\varrho B_\varrho \subseteq (AB)_\varrho$ und in Verbindung mit (2) also (3).

Die Definition der Parallelkörper läßt weiter unmittelbar erkennen, daß

$$A_\varrho + B_\varrho = (A + B)_\varrho \tag{4}$$

ist. Wenden wir nun auf (4) die Volumformel (1) an und berücksichtigen sodann ferner (2), so folgt die Ungleichung

$$V[A_\varrho] + V[B_\varrho] \geqq V[(A+B)_\varrho] + V[(AB)_\varrho]. \tag{5}$$

Hier gilt, wie ein Rückblick auf (3) lehrt, das Gleichheitszeichen jedenfalls dann, wenn $A+B$ konvex ausfällt.

Im Folgenden bedeuten nun A und A_0 wieder die beiden Körper, welche dem zu beweisenden Satz zugrunde liegen.

Offenbar lassen sich dem Kalottenkörper A_0 an den Flachstellen passende Kugelkalotten $C_\nu^0 (\nu = 1, 2, \ldots n)$ so aufsetzen, daß dieser zu der Vollkugel K ergänzt wird. Da die Flachradien des Körpers A nicht kleiner als diejenigen von A_0 sind, lassen sich dem Körper A kongruente Kugelkalotten $C_\nu (\nu = 1, 2, \ldots n)$ so aufsetzen, daß die Kreisflächen der C_ν ganz Teilbereiche der Oberfläche von A ausmachen.

Den auf eine solche Weise aus A hervorgehenden, nun nicht mehr notwendig konvexen Körper wollen wir mit Z bezeichnen. Es ist demnach

$$K = A_0 + \sum_1^n C_\nu^0 \tag{6}$$

und

$$(C_\nu \cong C_\nu^0)$$

$$Z = A + \sum_1^n C_\nu. \tag{7}$$

Im Hinblick auf Voraussetzung (I) ist offenbar

$$V(Z) = V(K). \tag{8}$$

Nun gilt nach einem bekannten Satz[5]) aus der allgemeinen Theorie der isoperimetrischen Ungleichung im Raum die Volumbeziehung

$$V(Z_\varrho) \geqq V(K_\varrho). \tag{9}$$

Nun ersetzen wir in (9) die Körper K und Z durch die Ausdrücke (6) und (7), addieren auf beiden Seiten zwei passende Summen, welche im Hinblick auf die Kongruenz der angesetzten Kugelkalotten gleich sind und erhalten so

$$V[(A + \sum_1^n C_\nu)_\varrho] + \sum_1^n V[(A\,C_\nu)_\varrho] \geqq V[(A_0 + \sum_1^n C_\nu^0)_\varrho] + \sum_1^n V[(A_0\,C_\nu^0)_\varrho]. \tag{10}$$

Indem wir weiter auf die Summe der linken Seite die Ungleichung (5) zur Anwendung bringen, auf die Summe der rechten Seite dagegen

[5]) Es handelt sich um die Übertragung der Brunn-Minkowskischen Ungleichung auf abgeschlossene und beschränkte Mengen des Raumes. Einen direkten Beweis, ohne den Umweg über die Steinersche Symmetrisierung zu verfolgen, gaben A. Dinghas und E. Schmidt, Einfacher Beweis der isoperimetrischen Eigenschaft der Kugel im n-dimensionalen euklidischen Raum. Abhandlungen der Preuß. Akad. der Wiss. 1943. Math. Naturwiss. Kl. Nr. 7.

die Gleichung (5), so resultiert zunächst

$$V[A_\varrho] + \sum_1^n V[(C_\nu)_\varrho] \geqq V[(A_0)_\varrho] + \sum_1^n V[(C_\nu^0)_\varrho].$$

und nach trivialer Kürzung

$$V[A_\varrho] \geqq V[(A_0)_\varrho]. \tag{11}$$

Die Anwendung der Gleichung an Stelle der Ungleichung (5) oben ist deshalb statthaft, weil die Körper, die aus A_0 durch aufeinanderfolgendes Aufsetzen der Kugelkalotten C_ν^0 entstehen, stets konvex bleiben.

Endlich setzen wir in (11) für die Volumina der äußeren Parallelkörper die J. Steiner'schen Ausdrücke ein, und erhalten so

$$V + F\varrho + M\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3 \geqq V_0 + F_0\varrho + M_0\varrho^2 + \frac{4\pi}{3}\varrho^3.$$

oder nach naheliegenden Kürzungen

$$F + M\varrho \geqq F_0 + M_0\varrho. \tag{12}$$

Die letzte Relation ist aber für alle $\varrho > 0$ dann und nur dann richtig, wenn die Beziehungen

$$F \geqq F_0, \qquad M \geqq M_0 \tag{13}$$

gelten. Damit ist aber der Beweis unseres Satzes beendet, indem (13) mit den Behauptungen (1a) und (1b) identisch ist.

(Eingegangen am 10. August 1948.)

Über Schnittzahlen von Homotopieketten.

Von

E. Burger in Frankfurt (Main).

Einleitung.

Man weiß seit PONTRJAGINS Arbeit [1], daß die Dualitätssätze der Topologie der n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{M}^n$ sich zurückführen lassen auf Sätze über PONTRJAGINsche Gruppenpaare. Dabei heißen zwei (additiv geschriebene) ABELsche Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit endlich vielen Erzeugenden ein PONTRJAGINsches Gruppenpaar, wenn jedem Elementepaar $\{g, h\}$ mit g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ als „Produkt" eine ganz-rationale Zahl (oder ein Rest mod m oder eine rationale Zahl mod 1) zugeordnet ist, derart daß

1) das Distributivgesetz

$$(g_1+g_2).h = g_1.h+g_2.h$$
$$g.(h_1+h_2) = g.h_1+g.h_2$$

erfüllt ist,

2) zu jedem Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ ein Element h aus $\mathfrak{H}$ existiert mit

$$g.h \neq 0$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit

$$g.h \neq 0.$$

Eine solche Produktrelation zwischen zwei Gruppen wird insbesondere gegeben durch die Schnittzahlen zwischen den Elementen der BETTIschen Gruppen dualer Dimensionen sowie durch die Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen entsprechender Dimensionen. So ordnet sich die Theorie der Schnitte und Verschlingungszahlen der Theorie der PONTRJAGINschen Gruppenpaare unter. Die hierher gehörenden Überlegungen werden in § 1 der vorliegenden Arbeit noch einmal dargestellt, und zwar in einer Weise, wie sie sich für die späteren Übertragungen als nützlich erweist. Dabei wird für die Schnittzahlen von vornherein das schärfere Axiom $S\,2$ (§ 1) gefordert. Es handelt sich also um orthogonale Gruppenpaare in der Bezeichnungsweise PONTRJAGINS. Dann läßt sich der PONTRJAGINsche Dualitätssatz in der Form des Isomorphiesatzes 3 (§ 1) aussprechen. Für die Verschlingungszahlen ist die entsprechende Verschärfung des Axioms nicht erforderlich.

Anschließend (§§ 4 und 5) wird eine Übertragung dieser Theorie auf die Reidemeisterschen Homotopieketten untersucht. Die Untersuchung der Homotopieketten der $\mathfrak{M}^n$ führt bekanntlich zunächst auf Überdeckungen von $\mathfrak{M}^n$ mit den Hauptordnungen gewisser Kreiskörper (= homomorphes Bild des Gruppenrings der Fundamentalgruppe) (Reidemeister [2]). Dabei zeigt sich jedoch, daß der gewöhnliche Durchschnitt von Homotopieketten nicht ohne weiteres bei diesem Homomorphismus übertragen werden kann. An seine Stelle tritt dann zweckmäßig der Reidemeistersche τ-Prozeß (Reidemeister [4]) (§ 2). Für die mittels des τ-Prozesses erklärten Schnitt- und Verschlingungszahlen läßt sich dann eine dem rationalen Fall analoge Theorie aufbauen.

In algebraischer Hinsicht handelt es sich in diesem Fall an Stelle der gewöhnlichen Abelschen Gruppen um Operatorgruppen über der Hauptordnung eines Zahlkörpers. Hier wird nun, wie § 4 zeigt, das verschärfte Axiom $S\,2$ wesentlich für die Gültigkeit des Dualitätssatzes. Es muß allerdings jetzt etwas modifiziert werden, da wir uns nicht mehr in einem Hauptidealring bewegen. Auf diese Modifikation kommt man aber sofort, wenn man das Axiom im rationalen Fall etwas umformt (§ 1). Für die Verschlingungszahlen kann man das Axiom $V\,2$ dagegen ungeändert übernehmen. Mittels der Steinitzschen Theorie der Operatorgruppen über der Hauptordnung eines Zahlkörpers (Steinitz [1], [2]) folgen dann auch in diesem Fall zwei entsprechende Isomorphiesätze: Satz 16 (§ 4) und Satz 21 (§ 5).

Der § 3 bringt eine andere Behandlung der Schnittzahlen unter Benutzung eines Systems idealer Zahlen über dem Zahlkörper. Hieraus folgt dann auch, daß die Schnitt- bzw. Verschlingungszahlen wirklich den Axiomen $S\,2$ bzw. $V\,2$ genügen. Außerdem wird sowohl die arithmetische als auch die geometrische Bedeutung des verschärften Axioms $S\,2$ deutlich (§ 3, Satz 8 und 9; § 4, Satz 13 und Bemerkung nach Satz 15).

Topologisch besagen die Isomorphiesätze, daß auch für die k-dimensionalen Homotopieketten die Schnitt- und Verschlingungszahlen im Falle $k \neq n-k$ bzw. $k \neq n-k-1$ keine Invarianten liefern. Dagegen erhält man durch die Betrachtung der Eigenschnitt- und -verschlingungszahlen ($k = n-k$ bzw. $k = n-k-1$) entsprechende Invarianten wie im rationalen Fall, z. B. führt die Untersuchung der Eigenschnittzahlen auf ein Darstellungsproblem aus der Theorie der Hermiteschen Formen (§ 4). Die Brauchbarkeit dieser Invarianten wird im § 6 an einem Beispiel gezeigt.

§ 1.

Der rationale Fall.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei gewöhnliche Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sei eine Schnittbeziehung

erklärt, d. h. jedem Elementepaar $g \in \mathfrak{G}$ und $h \in \mathfrak{H}$ ist eine ganze rationale Zahl $g \,.\, h$ als Schnittzahl zugeordnet mit den Eigenschaften:

Axiom $S1$: $(g+g') \,.\, h = g \,.\, h + g' \,.\, h$ und ebenso

$$g \,.\, (h+h') = g \,.\, h + g \,.\, h'.$$

Axiom $S2'$: Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es wenigstens ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$g \,.\, h \neq 0$$

und entsprechend für jedes $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Aus Axiom $S1$ folgt sofort $(mg) \,.\, h = m(g \,.\, h)$ für jedes natürliche m, ferner $(0 \,.\, h) = o$, wobei 0 das Nullelement aus $\mathfrak{G}$ bedeutet; denn es ist für jedes g $(g+0) \,.\, h = g \,.\, h + 0 \,.\, h$. Weiter ist $(g-g) \,.\, h = g \,.\, h + (-g) \,.\, h = o$, also $(-g) \,.\, h = -(g \,.\, h)$ und daher für alle ganzen Zahlen λ

$$(\lambda g) \,.\, h = \lambda (g \,.\, h) \tag{2a}$$

und ebenso

$$g \,.\, (\lambda h) = \lambda (g \,.\, h). \tag{2b}$$

Es folgt sofort

Satz 1. *Kein Element* $\neq 0$ *aus* $\mathfrak{G}$ *und ebenso kein Element* $\neq 0$ *aus* $\mathfrak{H}$ *ist von endlicher Ordnung.*

Beweis. Aus $g \neq 0$ folgt nach Axiom $S2'$ die Existenz eines h aus $\mathfrak{H}$ mit $g \,.\, h \neq o$. Dann folgt aber aus $mg = 0$ sofort $(mg) \,.\, h = m(g \,.\, h) = o$ und daher $m = o$.

Wir nennen nun ein Element von $\mathfrak{G}$ primitiv, wenn es nicht echtes Vielfaches $\lambda g'$ (λ ganz $\neq \pm 1$) eines anderen Elementes g' aus $\mathfrak{G}$ ist und verschärfen das Axiom $S2'$ zum

Axiom $S2$. Zu jedem primitiven Element g aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein Element h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$g \,.\, h = 1$$

und entsprechend zu jedem primitiven Element h aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Zu einer etwas anderen Formulierung dieses Axioms gelangt man durch folgende Betrachtung. Jedes Element g aus $\mathfrak{G}$ läßt sich mit eindeutig bestimmten Koeffizienten als Linearkombination der Elemente einer Basis schreiben. g ist offenbar dann und nur dann primitiv, wenn der größte gemeinsame Teiler dieser Koeffizienten gleich 1 ist. Ist g nicht primitiv, so läßt es sich darstellen als tg', wo g' primitiv, t eine bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte ganze rationale Zahl (eben der g. g. T. der Koeffizienten von g) ist. Dann kann man das Axiom $S2$ auch so formulieren: Alle Vielfachen von t kommen als Schnittzahlen von g mit den Elementen von $\mathfrak{H}$ vor.

Schließlich läßt sich dies durch g bestimmte Ideal (t) unabhängig von jeder speziellen Auswahl einer Basis von $\mathfrak{G}$ auch so charakterisieren: Wir betrachten für ein festes g aus $\mathfrak{G}$, welches $\neq 0$ ist, jene rationale Zahlen $r = n_1/n_2$, für die das Element rg existiert, d. h. für die es ein g' aus $\mathfrak{G}$ gibt, für welches $n_1 g = n_2 g'$ ist. Wenn es überhaupt ein solches g' gibt, ist es ja eindeutig bestimmt, da $\mathfrak{G}$ rein unendlich ist. Alle diese Zahlen r bilden ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{n}$, den „Nenner" von g. Und es ist offenbar $\mathfrak{n} = (1/t) = 1/(t)$. Damit erhält Axiom $S2$ die Fassung: Jedes Element des reziproken Nenners $1/\mathfrak{n}$ von $g \neq 0$ kommt als Schnittzahl von g mit einem geeigneten Element h aus $\mathfrak{H}$ vor. In dieser Form wird das Axiom später auf den algebraischen Fall übertragen werden.

Die gesamten Schnittrelationen zwischen den Elementen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind bekannt, wenn man diejenigen zwischen den Basiselementen kennt. Seien also $g_1, \ldots, g_n$ die Elemente einer Basis von $\mathfrak{G}$ und $h_1, \ldots, h_m$ die Elemente einer Basis von $\mathfrak{H}$. Dann betrachten wir die Schnittmatrix $\mathfrak{S} = (g_i \,.\, h_k)$ aus den Schnittzahlen dieser Elemente. Bei Übergang zu neuen Basen $g_1^*, \ldots, g_n^*$ von $\mathfrak{G}$ und $h_1^*, \ldots, h_m^*$ von $\mathfrak{H}$ transformiert sich $\mathfrak{S}$ in

$$\mathfrak{S}^* = P \mathfrak{S} Q' \tag{3}$$

mit ganzen unimodularen Matrizen P und Q. Nun kann man bekanntlich bei gegebenem $\mathfrak{S}$ unimodulare Matrizen P und Q so angeben, daß $P\mathfrak{S}Q'$ in Elementarteilernormalform erscheint,

$$\mathfrak{S}^* = \begin{pmatrix} e_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & e_r & \\ & 0 & & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

mit positiven e_i, die sich sukzessive teilen: $e_1 | e_2 \ldots | e_r$. Man erkennt dann sofort, daß die in (4) auftretenden Nullzeilen und -spalten in Wirklichkeit nicht vorkommen können, denn für die betreffenden Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ wären alle Schnittzahlen gleich Null, und das kann nach Axiom $S2'$ nicht sein. Es muß also

$$r = m = n \tag{5}$$

sein. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind isomorph.

Weiter ist z. B. das Element g_i^* $(i = 1, \ldots, n)$ als Basiselement primitiv. Es gibt also nach Axiom $S2$ ein Element h aus $\mathfrak{H}$, mit dem es die Schnittzahl 1 hat. Die überhaupt vorkommenden Schnittzahlen sind aber die Vielfachen von e_i, also ist $e_i = 1$ $(i = 1, \ldots, n)$. $\mathfrak{S}^*$ ist die Einheitsmatrix. Also gilt der

Satz 2. *Die Schnittmatrix* $\mathfrak{S}$, *bezogen auf irgendwelche Basen von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$, *ist unimodular.*

Hat man zwei Gruppenpaare $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ mit je einer Schnittrelation und sind die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ isomorph, so sind auch die Gruppen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ isomorph. Man kann nun in beiden Paaren die Basen so wählen, daß die Schnittmatrizen Einheitsmatrizen sind. Ordnet man dann die entsprechenden Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie die von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so erhält man dadurch einen Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare die gleichen Schnittzahlen haben.

Satz 3. *Sind in den Gruppenpaaren* $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ *mit Schnittrelation die Komponenten* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{G}'$ *isomorph, so ist auch*

$$\mathfrak{H} \cong \mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}' \cong \mathfrak{H}'$$

und die beiden Paare $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$ *sind schnittreu isomorph.*

Ist speziell $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}$, handelt es sich also um eine Schnittvorschrift in einer Gruppe $\mathfrak{G}$, so tritt zu den beiden Axiomen $S1$ und $S2$ als neue Forderung noch das weitere

Axiom $S3a$. Es ist für alle g_1, g_2 aus $\mathfrak{G}$

$$g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1 \tag{6a}$$

oder $S3b$

$$g_1 \cdot g_2 = -g_2 \cdot g_1. \tag{6b}$$

Zur Untersuchung des Isomorphieproblems in diesem Falle muß man für die Zeilen und Spalten der Schnittmatrix $\mathfrak{S}$ dieselbe Basis von $\mathfrak{G}$ verwenden. Da Satz 2 ungeändert gültig bleibt, ist auch jetzt $\mathfrak{S}$ unimodular, darüber hinaus im Falle des Axioms $S3a$ symmetrisch, im Falle $S3b$ antisymmetrisch. Im letzten Fall muß also die Reihenzahl von $\mathfrak{S}$ gerade sein. Bei Basiswechsel geht $\mathfrak{S}$ über in $P\mathfrak{S}P'$. Und man erkennt, daß im Falle $S3a$ die Frage nach den sämtlichen verschiedenen Schnittvorschriften für eine Gruppe $\mathfrak{G}$ genau das Äquivalenzproblem der ganzzahligen quadratischen Formen der Determinante ± 1 ist. Im Falle $S3b$ dagegen kann man bekanntlich $\mathfrak{S}$ in eine feste Normalform überführen. Es gibt dann bis auf Isomorphismen nur eine Schnittvorschrift für die feste Gruppe $\mathfrak{G}$.

Im Falle zweier Gruppen mit einer Verschlingungsrelation handelt es sich um Folgendes: Es seien wieder $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei gewöhnliche Abelsche Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden. Jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$, h aus $\mathfrak{H}$ sei eine rationale Zahl mod 1 $V(g, h)$ als Verschlingungszahl zugeordnet, wobei die folgenden Axiome gelten:

Axiom $V1$. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ gilt

$$\begin{aligned} V(g_1 + g_2, h) &\equiv V(g_1, h) + V(g_2, h) \mod 1 \\ V(g, h_1 + h_2) &\equiv V(g, h_1) + V(g, h_2) \mod 1. \end{aligned} \tag{7}$$

Axiom $V2$. Zu jedem $g \not\equiv 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$V(g, h) \not\equiv 0 \mod 1$$

und ebenso zu jedem $h \not\equiv 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Genau wie für die Schnittzahlen folgt auch hier

$$V(0, h) \equiv V(g, 0) \equiv o \bmod 1 \tag{8}$$

für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$, wobei 0 das Nullelement von $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{G}$ bedeutet, sowie

$$V(\lambda g, \mu h) \equiv \lambda V(g, h) \mu \bmod 1 \tag{9}$$

für alle ganzen Zahlen λ, μ. Weiter folgt der Satz

Satz 4. *Alle Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind von endlicher Ordnung. Da $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ein endliches Erzeugendensystem haben, sind sie also endliche Gruppen.*

Beweis. Sei $h_1, \ldots, h_m$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$ und g ein festes Element von $\mathfrak{G}$. Seien die Verschlingungszahlen $V(g, h_i) \equiv \mu_i / \nu_i$ ($\mu_i, \nu_i \neq o$ ganze Zahlen): dann ist $\nu_1 \ldots \nu_m \cdot V(g, h_i) \equiv V(\nu_1 \ldots \nu_m g, h_i) \equiv o$ und daher für alle Elemente h aus $\mathfrak{H}$ $V(\nu_1 \ldots \nu_m g, h) \equiv o$. Also ist nach Axiom $V2$ $\nu_1 \ldots \nu_m g = 0$.

Wiederum kennt man alle Verschlingungszahlen, wenn man die eines Erzeugendensystems von $\mathfrak{G}$ mit einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$ kennt. Sei $g_1, \ldots, g_n$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$, $h_1, \ldots, h_m$ ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$. Dann bilden wir aus ihren Verschlingungszahlen die Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V} = (V(g_i, h_k))$. Ihre Elemente sind also mod 1 bestimmte rationale Zahlen. Wir wählen für sie irgendwelche feste rationale Repräsentanten. Nimmt man an dieser Matrix mit festen rationalen Elementen irgendeine der elementaren Transformationen der Elementarteilertheorie vor (Vertauschen zweier Zeilen, Multiplikation einer Zeile mit -1, Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer zweiten und entsprechende Operationen für die Spalten), so geht sie offenbar über in eine Matrix, welche der Verschlingungsmatrix geeigneter anderer Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mod 1 kongruent ist. Gelingt es also, die Matrix mit festen Repräsentanten auf eine Normalform zu bringen, so gibt es Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, für die die Verschlingungsmatrix jener Normalform kongruent ist.

Nun kann man eine Matrix mit rationalen Koeffizienten durch elementare Transformationen ebenso wie eine ganzzahlige auf Elementarteilernormalform bringen

$$\begin{pmatrix} r_1 & & & & & \\ & r_2 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & r_k & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

wobei die $r_1, \ldots, r_k$ rationale Zahlen sind, die sich sukzessive teilen.

Es gibt also je ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$, für die die Verschlingungsmatrix der Gestalt (10) kongruent ist. Es seien dies die Systeme $g_1^*, \ldots, g_{n^*}^*$ bzw. $h_1^*, \ldots, h_{m^*}^*$. Dann folgt aus Axiom $V2$ sofort, daß $g_{k+1}^* = g_{k+2}^* = \cdots = g_{n^*}^* = 0$ gleich dem Nullelement von $\mathfrak{G}$ und $h_{k+1}^* = \cdots = h_{m^*}^* = 0$ gleich dem Nullelement von $\mathfrak{H}$ ist. Weiter sieht man, daß die $g_1^*, \ldots, g_k^*$ eine Basis von $\mathfrak{G}$ bilden; denn aus einer linearen ganzzahligen Relation $\sum \lambda_i g_i^* = 0$ folgt

$$V(\sum \lambda_i g_i^*, h_i^*) \equiv o \equiv \lambda_i r_i$$

für $i = 1, \ldots k$. Dann ist aber auch $V(\lambda_i g_i^*, h_i^*) \equiv o$ für alle i, und da sowieso $V(\lambda_i g_i^*, h^*) = o$ für alle i und $j \neq i$, so folgt $V(\lambda_i g_i^*, h) \equiv o$ für alle h aus $\mathfrak{H}$ und daher nach Axiom $V2$ $\lambda_i g_i^* = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$. Genau ebenso folgt, daß auch die $h_1^*, \ldots, h_k^*$ eine Basis von $\mathfrak{H}$ bilden.

Sei $r_1 = \lambda : \mu$ mit ganzen teilerfremden λ, μ und o_1 die Ordnung von g_1^*. o_1 ist die kleinste natürliche Zahl, für die $o_1 g_1^* = 0$ wird, d. h. nach Axiom $V1$ und $V2$ die kleinste natürliche Zahl, für die $V(o_1 g_1^*, h) \equiv o$ für alle h aus $\mathfrak{H}$. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn $V(o_1 g_1^*, h_i^*) \equiv o$ für $i = 1, \ldots, k$, und dies ist offenbar gleichbedeutend mit $V(o_1 g_1^*, h_1^*) \equiv o_1 \lambda / \mu \equiv o$. Wegen $(\lambda, \mu) = 1$ folgt daher sofort

$$o_1 = \mu. \tag{11}$$

Ganz ebenso sieht man, daß die Nenner von $r_2, \ldots, r_k$ in gekürzter Form gleich den Ordnungen von $g_2^*, \ldots, g_k^*$ sind. Gleichzeitig folgt aber ebenso, daß diese Nenner auch die Ordnungen von $h_1^*, \ldots, h_k^*$ sind. Also sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ isomorph. Da die r_i sich sukzessive teilen, folgt, daß die Ordnungen sich umgekehrt sukzessive teilen

$$o_k \mid o_{k-1} \ldots \mid o_1. \tag{12}$$

Bekanntlich sind unter der Bedingung (12) die Ordnungen der Basiselemente durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt.

Man kann auch die Zähler der r_i noch normieren, wenn man beachtet, daß man noch die Freiheit hat, g_1^* durch νg_1^* zu ersetzen, wo ν eine ganze zu o_1 teilerfremde Zahl ist. Wegen $(\lambda, o_1) = (\lambda, \mu) = 1$ kann man dann ν so wählen, daß $\nu \lambda \equiv 1 \bmod o_1$ wird, und damit wird

$$V(\nu g_1^*, h_1^*) \equiv 1/o_1. \tag{13}$$

Entsprechendes gilt für die $g_2^*, \ldots, g_k^*$.

Satz 5. *Für zwei Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit Verschlingungsrelation ist $\mathfrak{G} \simeq \mathfrak{H}$. Bedeuten $o_1, \ldots, o_k$ mit $o_1 \mid o_2 \mid \ldots \mid o_k$ die durch $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmten Ordnungen einer Basis von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$, so gibt es eine Basis von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ mit diesen Ordnungen, für welche die Verschlingungs-*

matrix die Gestalt

$$\mathfrak{V} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{o_1} & & & \\ & \frac{1}{o_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \frac{1}{o_k} \end{pmatrix} \tag{14}$$

hat.

Daraus folgt nun sofort der Isomorphiesatz

Satz 6. *Ist für zwei Gruppenpaare mit Verschlingungsrelation* $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$, *so sind die Paare* $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ *und* $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ *verschlingungstreu isomorph.*

Beweis. Da die $o_1, \ldots, o_k$ unter der Bedingung (12) durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt sind, kann man nach Satz 5 sowohl in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als auch in $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ je eine Basis mit diesen Ordnungen so wählen, daß die Verschlingungsmatrix in beiden Fällen durch (14) gegeben ist. Ordnet man nun die Basiselemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie die von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so entsteht dadurch offenbar ein Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare die gleiche Verschlingungszahl haben, der Isomorphismus also verschlingungstreu ist.

Ist wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch, so handelt es sich um eine Gruppe mit Eigenverschlingung. Satz 5 bleibt natürlich gültig. Außerdem fordert man jetzt noch ein neues Axiom, nämlich

Axiom $V3$a. Es ist für alle g aus $\mathfrak{G}$

$$V(g_1, g_2) \equiv V(g_2, g_1) \mod 1 \tag{15a}$$

oder $V3$b

$$V(g_1, g_2) \equiv -V(g_2, g_1) \mod 1. \tag{15b}$$

Die nähere Untersuchung dieser Fälle findet sich bei de Rham [1] (Axiom $V3$b) und Seifert [1] (Axiom $V3$a).

§ 2.

Der Reidemeistersche τ-Prozeß.

Im Folgenden soll die oben dargestellte Theorie auf die Reidemeisterschen Homotopieketten übertragen werden. Es sei $\mathfrak{M}^n$ der Zerlegungskomplex einer n-dimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit, A die universelle Überlagerung von $\mathfrak{M}^n$, $\bar{A}$ die zu A duale universelle Überlagerung der dual zerlegten Mannigfaltigkeit $\bar{\mathfrak{M}}^n$. Die gewöhnlichen ganzzahligen k-dimensionalen Ketten von A heißen auch Homotopieketten von $\mathfrak{M}^n$. Wir führen den Gruppenring $\mathfrak{X}$ der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{M}^n$ über dem Ring der ganzen rationalen Zahlen ein. Seine Elemente sind die endlichen ganzzahligen Linearkombinationen

$x = \sum \lambda_\nu g_\nu$ der Elemente g_ν aus $\mathfrak{G}$. Dann lassen sich die Homotopieketten als

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k \tag{1}$$

schreiben mit x_i aus $\mathfrak{X}$, wobei $\mathfrak{a}_i^k$ die k-dimensionalen Zellen eines Fundamentalbereiches von A bezüglich der Gruppe $\mathfrak{G}$ der Decktransformationen durchläuft. Ebenso erhält man die Ketten von $\tilde{A}$ in der Form

$$\tilde{\mathfrak{x}}^k = \sum_i x_i \tilde{\mathfrak{a}}_i^k. \tag{2}$$

Erklärt man eine Multiplikation zwischen den Elementen von $\mathfrak{X}$ und den Homotopieketten gemäß

$$x\,\mathfrak{x}^k = \sum_i (x\,x_i)\,\mathfrak{a}_i^k, \tag{3}$$

so wird die Kettengruppe eine Operatorgruppe über $\mathfrak{X}$ mit endlich vielen Erzeugenden.

Bezeichnet man die Randbildung durch einen Punkt, so gilt

$$(x\,\mathfrak{x}^k)\cdot = x\,\dot{\mathfrak{x}}^k. \tag{4}$$

Die geschlossenen Ketten bilden also eine zulässige Untergruppe, ebenso auch die berandenden. Daher sind dann auch die Homologiegruppen von A Operatorgruppen über $\mathfrak{X}$.

Sei $\mathfrak{x}^k$ eine k-dimensionale Kette von A und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ eine $(n-k+f)$-dimensionale Kette von $\tilde{A}$. Dann bestimmen sie beide einen Durchschnitt $\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ im gewöhnlichen Sinne, der eine f-dimensionale Kette des durch A und $\tilde{A}$ bestimmten Durchschnittskomplexes Δ ist, welcher den Durchschnittskomplex $\mathfrak{M}_3^n$ von $\mathfrak{M}^n$ und $\tilde{\mathfrak{M}}^n$ universell überlagert. Für diesen Durchschnitt gelten die üblichen Distributiv- und Multiplikationsregeln

$$(\mathfrak{x}_1 + \mathfrak{x}_2)\,.\,\tilde{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x}_1 \,.\, \tilde{\mathfrak{x}} + \mathfrak{x}_2 \,.\, \tilde{\mathfrak{x}} \tag{5a}$$

$$\mathfrak{x}\,.\,(\tilde{\mathfrak{x}}_1 + \tilde{\mathfrak{x}}_2) = \mathfrak{x}\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}_1 + \mathfrak{x}\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}_2 \tag{5b}$$

$$(\lambda\,\mathfrak{x})\,.\,(\mu\,\tilde{\mathfrak{x}}) = \lambda\mu\,(\mathfrak{x}\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}), \tag{5c}$$

wobei λ, μ ganze rationale Zahlen sind. Ferner gilt für die Gruppenelemente g von $\mathfrak{G}$, welche ja Deckbewegungen der universellen Überlagerung verursachen,

$$(g\,\mathfrak{x}^k)\,.\,(g\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = g\,(\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\,. \tag{6}$$

Bei Vertauschung der Rollen von A und $\tilde{A}$ gilt die Vertauschungsregel

$$\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f} \,.\, \mathfrak{x}^k = (-1)^{(n-k)(k-f)}\,\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}. \tag{7}$$

Und schließlich hat man für den Rand des Durchschnitts die „Differentiationsregel“

$$(\mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\cdot = \mathfrak{x}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f} + (-1)^{k-f}\,\dot{\mathfrak{x}}^k \,.\, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \tag{8}$$

aus der sofort folgt, daß der Durchschnitt zweier geschlossener Ketten

geschlossen und der einer berandenden Kette und einer geschlossenen berandend ist. Man kann also in der üblichen Weise für die Elemente der Homologiegruppen Durchschnitte erklären gemäß

$$[\mathfrak{x}^k] \cdot [\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}] = [\mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}]. \tag{9}$$

Dabei bezeichnet $[\mathfrak{x}^k]$ die Homologieklasse, in der $\mathfrak{x}^k$ liegt. Die Schnittrelationen sind invariant gegenüber Unterteilung des Komplexes. Daher ist es für die Durchschnitte von Homologieklassen gleichgültig, ob man die erste Komponente aus dem Komplex A und die zweite aus $\tilde{A}$ wählt oder umgekehrt, d. h. man kann auch $\tilde{A}$ als Ausgangskomplex und A als Dualkomplex betrachten. Dann folgt aus (7) die gleiche Vertauschungsregel für den Durchschnitt von Homologieklassen.

Der Durchschnitt zweier Zellen $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f}$ ist eine Zelle von $\mathcal{A}$ oder leer, und es gibt zu jedem Zellenpaar $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f}$ höchstens ein Gruppenelement $g_{i,j}^{k,f}$, so daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot g_{i,j}^{k,f} \tilde{\mathfrak{a}}^{n-k+f} \neq o \tag{10}$$

ist. Für zwei Ketten komplementärer Dimension $\mathfrak{x}^k$ und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}$ ist der Durchschnitt nulldimensional. In diesem Falle gibt es insbesondere zu jeder Zelle $\mathfrak{a}_i^k$ nur eine einzige Zelle $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ und ein einziges Gruppenelement g_i, so daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot g_i \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k} = \mathfrak{c}_i^0 \neq o$$

ist. $\mathfrak{c}_i^0$ ist dabei ein Punkt von $\mathcal{A}$. Durch diese Bedingung wird eine umkehrbar eindeutige Beziehung zwischen $\mathfrak{a}_i^k$ und $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ hergestellt. Nun sind aber in der Darstellung (2) die $g_i \tilde{\mathfrak{a}}_i^{n-k}$ ebensogut zu verwenden wie die $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ selbst. Außerdem können wir sie noch umnumerieren. Wir wollen daher von vorneherein die $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ so gewählt denken, daß

$$\mathfrak{a}_i^k \cdot \tilde{\mathfrak{a}}_i^{n-k} = \mathfrak{c}_i^0 \neq o \tag{11}$$

und damit

$$g_\nu \mathfrak{a}_i^k \cdot g_\mu \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k} = \delta_{\nu\mu} \delta_{ij} g_\nu \mathfrak{c}_i^0$$

ist. Dann wird für irgendzwei Ketten

$$\mathfrak{x}^k = \sum x_i \mathfrak{a}_i^k \quad \text{und} \quad \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum \tilde{x}_j \tilde{\mathfrak{a}}^{n-k}$$

mit

$$x_i = \sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu \quad \text{und} \quad \tilde{x}_j = \sum_\mu \lambda_{j\mu} g_\mu$$

$$\mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} \tilde{\lambda}_{i\nu} g_\nu \mathfrak{c}_i^0. \tag{12}$$

Die Untersuchung der Überlagerung A führt nun zunächst auf die Untersuchung gewisser einfacherer Überdeckungen (Reidemeister [2], Franz [2]). Sei nämlich $\mathfrak{G}'$ eine endliche Abelsche Gruppe und homomorphes Bild von $\mathfrak{G}$, dann ist auch der Gruppenring $\mathfrak{X}'$ von $\mathfrak{G}'$ homomorphes Bild des Gruppenringes $\mathfrak{X}$. Der entsprechende Gruppenring $\mathfrak{X}'_P$ über dem rationalen Körper P ist dann direkte Summe gewisser Kreis-

körper K, und jeder dieser Kreiskörper ist homomorphes Bild von $\mathfrak{X}'_P$. Entsprechend ist die Hauptordnung der ganzen Zahlen von K homomorphes Bild des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}'$ und damit auch von $\mathfrak{X}$.

Sei jetzt also φ eine homomorphe Abbildung des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}$ auf die Hauptordnung $\mathfrak{Y}$ eines algebraischen Zahlkörpers

$$\mathfrak{Y} = \varphi(\mathfrak{X}). \tag{13}$$

Dann überträgt sich dieser Homomorphismus unmittelbar auf die Kettengruppen. Bezeichne nämlich $\mathfrak{X}\mathfrak{x}$ die Kettengruppe mit den Elementen $\mathfrak{x}^k = \sum x_i \mathfrak{a}_i^k$ und $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ die mit den Elementen $\mathfrak{y}^k = \sum y_i \mathfrak{a}_i^k$ (y_i aus $\mathfrak{Y}$), so hat man nur zu setzen

$$\varphi(\mathfrak{x}^k) = \varphi(\sum x_i \mathfrak{a}_i^k) = \sum \varphi(x_i)\, \mathfrak{a}_i^k = \mathfrak{y}^k. \tag{14}$$

Dieser Homomorphismus ist insofern operatortreu, als der Operator x durch den homomorphen Operator $y = \varphi(x)$ zu ersetzen ist,

$$\varphi(x\mathfrak{x}^k) = \varphi(x)\, \varphi(\mathfrak{x}^k). \tag{15}$$

Für die Kettengruppe $\mathfrak{X}\mathfrak{x}$ sind die Homotopieränder erklärt. Dann kann man Berandungsrelationen für die Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ durch homomorphen Übergang erklären

$$\dot{\mathfrak{y}}^k = [\varphi(\mathfrak{x}^k)]^{\cdot} = \varphi(\dot{\mathfrak{x}}^k). \tag{16}$$

Diese Definition ist in der Tat eindeutig; denn wenn

$$\varphi(\mathfrak{x}^k) = \varphi(\sum x_i \mathfrak{a}_i^k) = 0$$

ist, d. h. $\varphi(x_i) = o$ für alle i, so ist auch

$$\varphi(\dot{\mathfrak{x}}^k) = \varphi(\sum_{i,\nu} x_i \varepsilon_{i\nu}\, \mathfrak{a}_\nu^{k-1}) = \sum_{i,\nu} \varphi(x_i)\, \varphi(\varepsilon_{i\nu})\, \mathfrak{a}_\nu^{k-1} = 0.$$

Außerdem übertragen sich sofort die üblichen Randregeln

$$(\mathfrak{y}_1^k + \mathfrak{y}_2^k)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{y}}_1^k + \dot{\mathfrak{y}}_2^k, \tag{17}$$

$$(y\,\mathfrak{y}^k)^{\cdot} = y\,\dot{\mathfrak{y}}^k, \tag{18}$$

$$(\dot{\mathfrak{y}}^k)^{\cdot} = 0, \tag{19}$$

aufgrund deren sich die Begriffe geschlossen, berandend, homolog, Homologiegruppe in der üblichen Weise erklären lassen. Die Homologiegruppen sind Operatorgruppen über $\mathfrak{Y}$.

Wollte man nun jedoch den Durchschnitt auch vermöge desselben Homomorphismus von den Homotopieketten auf die Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ übertragen, also

$$\varphi(\mathfrak{x}^k)\,.\,\varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = \varphi(\mathfrak{x}^k\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})$$

setzen, so ist nicht einmal die Eindeutigkeit dieser Definition gesichert. Es ist nämlich etwa für $f = o$ nach (12)

$$\varphi(\mathfrak{x}^k\,.\,\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \varphi(\sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu}\, \lambda_{i\gamma}\, g_\nu\, \mathfrak{c}_i^0) = \sum_{i,\nu} \varphi(\lambda_{i\nu}\, \tilde{\lambda}_{i\nu}\, g_\nu)\, \mathfrak{c}_i^0.$$

Ist nun $\varphi(\mathfrak{x}^k) = 0$, d. h. $\varphi(\sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu) = o$ für alle i, so müßte auch die rechte Seite für jede Wahl von $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}$, d. h. für jede Wahl der $\tilde{\lambda}_{i\nu}$ verschwinden. Das ist aber keineswegs der Fall.

Diese Schwierigkeit wird behoben, wenn man nicht den gewöhnlichen Durchschnitt, sondern den τ-Prozeß von Reidemeister (Reidemeister [4]) und die daraus entspringenden Schnittzahlen benutzt.

Jede Kette aus Δ liegt über einer wohlbestimmten Kette aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$. Sei die Kette aus Δ $\mathfrak{x}^k$, so bezeichnen wir die Kette aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$, über der sie liegt mit $(\mathfrak{x}^k)'$. Der Strich bedeutet also die Projektion aus dem Überlagerungskomplex Δ in den Grundkomplex $\mathfrak{M}^n_\Delta$. Insbesondere liefern die Bilder der Zellen $\mathfrak{c}^k_i$ genau einmal sämtliche Zellen von $\mathfrak{M}^n_\Delta$, die wir mit dem entsprechenden lateinischen Buchstaben c^k_i bezeichnen wollen, wenn die $\mathfrak{c}^k_i$ einen Fundamentalbereich von Δ durchlaufen,

$$(\mathfrak{c}^k_i)' = c^k_i. \tag{20}$$

Dann ist offenbar das Bild von $\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} g_\nu \mathfrak{c}^k_i$ bei der Projektion in den Grundkomplex

$$(\mathfrak{x}^k)' = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} c^k_i. \tag{21}$$

Setzen wir zur Abkürzung entsprechend für die Elemente $x = \sum_\nu \lambda_\nu g_\nu$ aus $\mathfrak{X}$

$$x' = (\sum_\nu \lambda_\nu g_\nu)' = \sum_\nu \lambda_\nu, \tag{22}$$

so gilt für die Projektion

$$(\mathfrak{x}^k)' = (\sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i)' = \sum_i x'_i c^k_i. \tag{23}$$

Wir brauchen noch das Verhalten des Randes bei Projektion. Der Homotopierand der Zellen $\mathfrak{c}^k_i$ sei durch

$$\dot{\mathfrak{c}}^k_i = \sum_j \varepsilon_{ij} \mathfrak{c}^{k-1}_j \qquad (\varepsilon_{ij} \text{ aus } \mathfrak{X}) \tag{24}$$

gegeben. Dann ist für jede beliebige Kette von Δ

$$((\sum_i x_i \mathfrak{c}^k_i)\cdot)' = (\sum_{i,j} x_i \varepsilon_{ij} \mathfrak{c}^{k-1}_j)' = \sum_{i,j} (x_i \varepsilon_{ij})' c^{k-1}_j.$$

Andrerseits ist nach Definition der Überlagerung der gewöhnliche Rand der Zelle c^k_i

$$\dot{c}^k_i = (\dot{\mathfrak{c}}^k_i)' = \sum_j \varepsilon'_{ij} c^{k-1}_j. \tag{25}$$

Nun ist offenbar $(x_1 x_2)' = x'_1 x'_2$ und daher

$$(\mathfrak{x}^{k\prime})\cdot = (\dot{\mathfrak{x}}^k)'. \tag{26}$$

Nun sieht man auch, wenn man die Formeln (23) und (26) mit (14) und (16) vergleicht, daß diese Projektion in den Grundkomplex nichts

weiter ist als der spezielle Homomorphismus, bei dem die Gruppenelemente g alle auf die Zahl 1 abgebildet werden.

Zur Definition des τ-Prozesses hat man nun nicht nur die gewöhnlichen Ketten von $\mathfrak{M}^n_\Delta$ zu betrachten, sondern als Koeffizientenbereich für diese Ketten den Gruppenring $\mathfrak{X}$ zuzulassen. Es handelt sich jedoch hierbei nicht um die Homotopieketten, da die Randdefinition von $\mathfrak{M}^n_\Delta$ benutzt wird. Dann besteht die zu betrachtende Kettengruppe aus den Ketten

(27) $$\mathfrak{q}^k = \sum_i x_i c_i^k$$

mit x_i aus $\mathfrak{X}$. Die Addition ist in der üblichen Weise erklärt, ferner eine vordere und hintere Multiplikation mit den Elementen x aus $\mathfrak{X}$ gemäß

(28a) $$x\,\mathfrak{q}^k = \sum_i (x\,x_i)\, c_i^k$$

und

(28b) $$\mathfrak{q}^k x = \sum_i (x_i x)\, c_i^k .$$

Durch diese Festsetzung wird die Kettengruppe eine Abelsche Gruppe mit vorderem und hinterem Operatorenbereich $\mathfrak{X}$. Als Rand der $\mathfrak{q}^k$-Ketten wird nun aber keineswegs der Homotopierand verwendet, sondern einfach definiert

(29) $$\dot{\mathfrak{q}}^k = \sum_i x_i \dot{c}_i^k ,$$

wobei $\dot{c}_i^k$ der gewöhnliche Rand der $\mathfrak{M}^n_\Delta$-Zelle c_i^k bedeutet. Diese Randbildung genügt den üblichen Bedingungen

(30) $$(\mathfrak{q}_1^k + \mathfrak{q}_2^k)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{q}}_1^k + \dot{\mathfrak{q}}_2^k ,$$

(31) $$(x\,\mathfrak{q}^k)^{\cdot} = x\,\dot{\mathfrak{q}}^k ,$$

(32) $$(\mathfrak{q}^k x)^{\cdot} = \dot{\mathfrak{q}}^k x .$$

Die Gruppe der geschlossenen Ketten, sowie die der berandenden, also auch die Homologiegruppen sind daher für den vorderen und hinteren Operatorenbereich $\mathfrak{X}$ zulässig.

Wir merken noch an, daß jede Kette $\mathfrak{q}^l$ eine eindeutige Darstellung

(33) $$\mathfrak{q}^l = \sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i$$

besitzt, wo die $\mathfrak{p}_i^k$ gewöhnliche Ketten aus $\mathfrak{M}^n_\Delta$ sind. Hierzu hat man nur in $\mathfrak{q}^l = \sum_i x_i c_i^k$ für die Koeffizienten ihre Ausdrücke $x_i = \sum_\nu \lambda_{i\nu} g_\nu$ einzusetzen, dann wird $\mathfrak{q}^l = \sum_{i,\nu} \lambda_{i\nu} g_\nu c_i^k = \sum_\nu (\sum_i \lambda_{i\nu} c_i^k)\, g_\nu = \sum_\nu \mathfrak{p}_\nu^k g_\nu$. In der Normaldarstellung (33) ergibt sich für die Randbildung aus (30) und (32)

(34) $$\dot{\mathfrak{q}}^l = (\sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i)^{\cdot} = \sum_i \dot{\mathfrak{p}}_i^k g_i ,$$

wobei $\dot{\mathfrak{p}}_i^k$ der gewöhnliche Rand der $\mathfrak{M}^n_\Delta$-Kette $\mathfrak{p}_i^k$ ist.

Nun kommen wir zur Definition des τ-Prozesses. Für irgendzwei Ketten $\mathfrak{x}^k$ von A und $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ von $\tilde{A}$ definieren wir als τ-Durchschnitt die Kette

$$\mathfrak{q}^f = \tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu . \tag{35}$$

Hierbei ist $\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ der Durchschnitt der Ketten $\mathfrak{x}^k$ und $g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}$ im üblichen Sinne, also eine f-dimensionale Kette von $\mathcal{A}$. Der Strich bedeutet die Projektion nach $\mathfrak{M}^n_{\mathcal{A}}$ und die Rechtsmultiplikation mit g_ν liefert dann gerade eine f-dimensionale Kette $\mathfrak{q}^f$ unserer oben betrachteten Kettengruppe in der Normalgestalt (33).

Zunächst ist der τ-Durchschnitt trivialerweise wieder distributiv zur Kettenaddition. Auch die Vertauschungsregel (7) überträgt sich — etwas verändert — auf den τ-Durchschnitt. Es ist nämlich nach (7) und (6)

$$\begin{aligned}\tau(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \mathfrak{x}^k) &= \sum_\nu (\tilde{\mathfrak{x}} \cdot g_\nu \mathfrak{x}^k)' g_\nu = (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (g_\nu \mathfrak{x}^k \cdot \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu \\ &= (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (g_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu^{-1} \tilde{\mathfrak{x}}))' g_\nu .\end{aligned}$$

Nun geht bei der Projektion der Vorfaktor g_ν verloren, und daher wird der letzte Ausdruck gleich

$$(-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu^{-1} \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu = (-1)^{(n-k)(k-f)} \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu^{-1} .$$

Nun erklärt man für den Gruppenring $\mathfrak{X}$ den Antiisomorphismus

$$\bar{x} = \overline{\sum_i \lambda_i g_i} = \sum_i \lambda_i g_i^{-1} \tag{36}$$

und überträgt ihn auf die Ketten $\mathfrak{q}^f = \sum_i x_i c_i^f$ gemäß

$$\overline{\mathfrak{q}^k} = \sum_i \bar{x}_i c_i^k \tag{37}$$

oder auch, was dasselbe ist, in der Normalform (33)

$$\overline{\mathfrak{q}^k} = \overline{\sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i} = \sum_i \mathfrak{p}_i^k g_i^{-1} . \tag{38}$$

Dann ist nach (28a) und (28b)

$$\overline{x\,\mathfrak{q}^k} = \overline{\mathfrak{q}^k}\,\bar{x} \text{ und } \overline{\mathfrak{q}^k\,x} = \bar{x}\,\overline{\mathfrak{q}^k}. \tag{39}$$

Für den τ-Durchschnitt erhält man so die Vertauschungsregel

$$\tau(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}, \mathfrak{x}^k) = (-1)^{(n-k)(k-f)} \overline{\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})}. \tag{40}$$

Weiter braucht man noch eine Regel für die Operatormultiplikation. Dazu berechnen wir zunächst $\tau(\mathfrak{x}^k, g\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})$. Es ist

$$\begin{aligned}\tau(\mathfrak{x}^k, g\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) &= \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu g \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})' g_\nu = \sum_\nu (\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu g \tilde{\mathfrak{x}})' g_\nu g g^{-1} \\ &= \tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\, g^{-1} .\end{aligned}$$

Aus der Vertauschungsregel folgt dann sofort nach (39)

$$\tau(g\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = (-1)^{(n-k)(k-f)}\tau(\tilde{\mathfrak{x}}, \overline{g\mathfrak{x}^k}) = (-1)^{(n-k)(k-f)}\overline{g^{-1}\tau(\tilde{\mathfrak{x}}, \mathfrak{x}^k)}$$
$$= g\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}).$$

Und daher ist allgemein

$$\tau(x_1\mathfrak{x}^k, x_2\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) = x_1\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})\bar{x}_2. \tag{41}$$

Wichtig ist nun die Feststellung, daß für den τ-Durchschnitt wieder die Randformel gilt. Es ist nämlich nach (34) und (26)

$$\dot{\tau}(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}) = \sum_\nu ((\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}})') \cdot g_\nu = \sum_\nu ((\mathfrak{x}^k \cdot g_\nu \tilde{\mathfrak{x}}) \cdot)' g_\nu.$$

Wendet man nun auf die innere Klammer die Randformel (8) an, so erhält man sofort

$$\dot{\tau}(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}) = \tau(\mathfrak{x}^k, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+f}) + (-1)^{k-f}\tau(\dot{\mathfrak{x}}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}). \tag{42}$$

Daher kann man wieder in der üblichen Weise τ-Durchschnitte für die Elemente der Homologiegruppen erklären gemäß

$$\tau([\mathfrak{x}^k], [\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}]) = [\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})]. \tag{43}$$

Der τ-Durchschnitt zweier Homologieklassen von A ist also eine Homologieklasse der oben betrachteten Kettengruppe (27) mit den Randbeziehungen (29).

Auch der τ-Durchschnitt von Homologieklassen ist invariant gegenüber Unterteilung des Komplexes. Daher ist es auch hier für die Bildung des Durchschnittes gleichgültig, ob man die erste Komponente aus A und die zweite aus $\tilde{A}$ wählt oder umgekehrt. Dann folgt aber aus (40) die Vertauschungsregel

$$\tau([\mathfrak{x}_1^k], [\mathfrak{x}_2^{n-k+f}]) = (-1)^{(n-k)(k-f)}\overline{\tau([\mathfrak{x}_2^{n-k+f}], [\mathfrak{x}_1^k])}, \tag{44}$$

wenn man den Querstrich für die Homologieklassen $[\mathfrak{q}^f]$ repräsentantenweise erklärt,

$$\overline{[\mathfrak{q}^f]} = [\overline{\mathfrak{q}^f}]. \tag{45}$$

Das geht; denn wenn $\dot{\mathfrak{q}}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^f g_i = 0$ ist, so ist auch $\dot{\overline{\mathfrak{q}}}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^f g_i^{-1} = 0$, und wenn $\mathfrak{q}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^{f+1} g_i$ ist, so ist auch $\overline{\mathfrak{q}}^f = \sum \dot{\mathfrak{p}}_i^{f+1} g_i^{-1}$.

Wie für gewöhnliche Durchschnitte wollen wir auch für den τ-Durchschnitt im Falle $f = 0$ Schnittzahlen erklären (Reidemeister [4], S. 237 f.). Seien c_i^0 die Punkte von $\mathfrak{M}_A^n$ und ihre Orientierung so getroffen, daß die Randkette jeder Strecke aus $\mathfrak{M}_A^n$ eine Differenz $c_i^0 - c_j^0$ ist. Dann ordnen wir der nulldimensionalen Kette $\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \sum_i s_i c_i^0$ als Schnittzahl das Gruppenringelement

$$S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \sum_i s_i \tag{46}$$

zu. Wir zeigen zunächst, daß für diese Schnittzahlen analoge Regeln wir für die gewöhnlichen Schnittzahlen gelten. Zunächst übertragen

sich die Distributivität, die Vertauschungsregel (40) und die Regel (41) für die Operatormultiplikation sofort,

$$S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = (-1)^{k(n-k)}\, \overline{S(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}, \mathfrak{x}^k)} \tag{47}$$

$$S(x_1\mathfrak{x}^k, x_2\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = x_1 S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})\,\bar{x}_2. \tag{48}$$

Man kann daher die Schnittzahlen irgendzweier Ketten

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k \text{ und } \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k} = \sum_j \tilde{x}_j\, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$$

leicht berechnen, sofern man die Schnittzahlen $S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k})$ kennt. Denken wir wieder die Normierung der $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ wie oben in (11) gewählt, so wird offenbar

$$S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}) = \delta_{ij} \tag{49}$$

und damit

$$S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}) = \sum_i x_i \bar{\tilde{x}}_i. \tag{50}$$

Betrachtet man weiter zwei Ketten $\mathfrak{x}^k$, $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}$, so ist $\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}) = \dot{\mathfrak{q}}^1$ eindimensional. Andrerseits ist nach der Randformel (42) die Summe der Schnittzahlen

$$S(\mathfrak{x}^k, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+1}) + (-1)^{k-1}\, S(\dot{\mathfrak{x}}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1})$$

gleich der Koeffizientensumme von $\dot{\mathfrak{q}}^1$. Nun verschwindet aber nach der obigen Festsetzung über die Orientierung der Punkte c_i^0 von $\mathfrak{M}_\Delta^n$ die Koeffizientensumme in jedem Rand $\dot{\mathfrak{p}}^1$ einer eindimensionalen Kette $\mathfrak{p}^1$ von $\mathfrak{M}_\Delta^n$. Und daher ist nach (34) die Koeffizientensumme von $\dot{\mathfrak{q}}^1$ ebenfalls gleich Null, also

$$S(\mathfrak{x}^k, \dot{\tilde{\mathfrak{x}}}^{n-k+1}) = (-1)^k\, S(\dot{\mathfrak{x}}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+1}). \tag{51}$$

Nach dieser Randformel ist die Schnittzahl zwischen einer geschlossenen und einer berandenden Kette gleich Null, und daher kann man für die Elemente der Homologiegruppen k-ter und $n-k$-ter Dimension eindeutig repräsentantenweise Schnittzahlen erklären

$$S([\mathfrak{x}^k], [\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}]) = S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}). \tag{52}$$

Für diese gilt ebenfalls die Vertauschungsregel (47).

Kehrt man die Orientierung der Mannigfaltigkeit um, so kehren sich offensichtlich die Vorzeichen aller Schnittzahlen um.

Sei nun wieder φ eine homomorphe Abbildung des ganzzahligen Gruppenringes $\mathfrak{X}$ auf die Hauptordnung $\mathfrak{Y}$. Für die Elemente von $\mathfrak{X}$ war nun nach (36) ein Antiisomorphismus erklärt

$$x = \sum_i \lambda_i g_i \to \bar{x} = \sum_i \lambda_i g_i^{-1}.$$

Dem Gruppenelement g_i entspricht eine gewisse Einheitswurzel in $\mathfrak{Y}$, g_i^{-1} also die konjugiert-komplexe Einheitswurzel. Für $\mathfrak{Y}$ hat man also den Automorphismus

$$y \to \bar{y},$$

wo $\bar{y}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu y ist. Und es ist ersichtlich

$$\varphi(\bar{x}) = \overline{\varphi(x)}. \tag{53}$$

Der τ-Durchschnitt läßt sich nun tatsächlich einfach durch den Homomorphismus φ übertragen. Wir definieren für

$$\begin{gathered}\mathfrak{y}^k = \varphi(\mathfrak{x}^k) \text{ und } \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k+f} = \varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f}) \\ \tau(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k+f}) = \varphi[\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})],\end{gathered} \tag{54}$$

wobei der Homomorphismus φ für die Ketten $\mathfrak{q}^f$ (27) ebenfalls wie in (14) erklärt ist. Jetzt ist die Definition in der Tat eindeutig; denn ist etwa

$$\mathfrak{x}^k = \sum_i x_i \mathfrak{a}_i^k, \quad \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f} = \sum_j \tilde{x}_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f},$$

dann ist nach (41)

$$\varphi[\tau(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k+f})] = \sum_{ij} \varphi(x_i)\, \varphi[\tau(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k+f})]\, \varphi(\bar{\tilde{x}}_j),$$

und das ist Null, wenn $\varphi(x_i) = 0$ für alle i oder wenn $\varphi(\tilde{x}_j) = 0$ für alle j.

Die Eigenschaften des τ-Durchschnittes übertragen sich ebenfalls alle bei der Definition (54). Für die Distributivität ist das sofort klar, für die Vertauschungsregel und die Regel über die Operatormultiplikation ebenfalls, wenn man noch (53) beachtet. Auch die Randregel bleibt gültig nach (16), wobei man noch bemerkt, daß die Randdefinition (16) für die Ketten $\mathfrak{q}^f = \sum_i x_i \mathfrak{c}_i^f$ auch durch $\varphi(\mathfrak{q}^f) = \sum \varphi(x_i)\, \mathfrak{c}_i^f$ gegeben werden kann. Man kann also auch jetzt wieder τ-Durchschnitte von Homologieklassen erklären. Schließlich definiert man im Falle $f = 0$ wieder Schnittzahlen $S(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k})$ entweder unmittelbar als Koeffizientensumme in $\tau(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k})$ oder auch, was auf dasselbe herauskommt, als $\varphi\, S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$. Dann bleiben auch die obigen Regeln für die Schnittzahlen gültig.

Ist der Homomorphismus φ speziell der Übergang $g_i \to 1$, also die Projektion in die Grundmannigfaltigkeit $\mathfrak{M}^n$, dann sind die eben erklärten Schnittzahlen $\varphi\, S(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$ offenbar gerade die gewöhnlichen Schnittzahlen der $\mathfrak{M}^n$-Ketten $\varphi(\mathfrak{x}^k)$ und $\varphi(\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k})$.

Die Homologiegruppen der Ketten $\mathfrak{Y}\mathfrak{y}$ sind Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{Y}$ von K und daher nach Steinitz (Steinitz [2], S. 328) direkte Summe der Untergruppe aller Elemente endlicher Ordnung (Torsionsgruppe) und einer Operatorgruppe vom Modultypus

(= freie Gruppe) (Bettimodul). Die Elemente aus den Homologieklassen der Torsionsgruppe nennen wir wie im ganzrationalen Fall Divisionsränder. Nach (51) verschwindet jede Schnittzahl zwischen einem Divisionsrand und einem Zyklus, so daß also die Schnittzahlen zwischen den Homologieklassen als Schnittzahlen zwischen den Elementen des Bettimoduls aufgefaßt werden können.

Für zwei Divisionsränder $\mathfrak{y}^k$ und $\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}$ der Dimension k bzw. $n-k-1$ definieren wir wie im rationalen Fall Verschlingungszahlen. Sei d eine Zahl aus der Ordnung von $\mathfrak{y}^k$, also $d \,.\, \mathfrak{y}^k$ berandend, etwa $\dot{\mathfrak{y}}^{k+1} = d \,.\, \mathfrak{y}^k$. Dann setzen wir

$$(55) \qquad V(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}) = \frac{1}{d} \cdot S(\mathfrak{y}^{k+1}, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}).$$

Genau wie im rationalen Fall beweist man auch hier, daß diese Definition unabhängig von der speziellen Wahl der Kette $\mathfrak{y}^{k+1}$ und der Zahl d aus der Ordnung von $\mathfrak{y}^k$ ist. Schließlich erklärt man repräsentantenweise Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen der Dimension k und $n-k-1$. Dies sind dann mod 1 bestimmte Zahlen des Körpers K; denn die Verschlingungszahl zwischen einem Rand und einem Divisionsrand ist eine ganze Zahl aus K. Für diese Verschlingungszahlen gelten die Distributivregel sowie die Vertauschungsregel

$$(56) \qquad V([\mathfrak{y}^k], [\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}]) = (-1)^{k(n-k+1)+1} \, V([\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k-1}], [\mathfrak{y}^k]) \bmod 1,$$

die sich aus (51) und (47) wie im rationalen Fall ergibt.

§ 3.

Schnittzahlen.

Die Gesamtheit $\mathfrak{R}^k$ der k-dimensionalen Ketten der zu betrachtenden Überdeckung sind die Linearformen

$$\mathfrak{x}^k = \sum_{i=1}^{\alpha_k} x_i \mathfrak{a}_i^k$$

mit Koeffizienten aus der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ aller ganzen Zahlen des Zahlkörpers K. Diese Linearformen bilden (in der Bezeichnungsweise von Steinitz) den Einheitsmodul $\mathfrak{E}_{\alpha_k}$ α_k-ten Grades. In ihm ist als Untermodul der Modul $\mathfrak{Z}^k$ aller k-dimensionalen (durch die Homotopierandrelationen bestimmten) Zyklen enthalten. $\mathfrak{Z}^k$ ist Grundmodul: denn mit jeder Kette enthält er auch jede proportionale Kette, sofern sie wieder ganzzahlige Koeffizienten hat. Dann ist aber (Steinitz [2], S. 304) $\mathfrak{Z}^k$ direkter Summand in $\mathfrak{R}^k$

$$(1) \qquad \mathfrak{R}^k = \mathfrak{Z}^k + \mathfrak{U}^k$$

und $\mathfrak{U}^k$ selbst Grundmodul. Die Ketten aus $\mathfrak{U}^k$ außer der Nullkette sind alle nicht geschlossen.

Der Zyklenmodul $\mathfrak{Z}^k$ enthält als Untermodul den Modul $\mathfrak{D}^k$ der Divisionsränder. $\mathfrak{D}^k$ ist ebenfalls Grundmodul, also direkter Summand in $\mathfrak{K}^k$

$$\mathfrak{K}^k = \mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}'$$

und daher

$$\mathfrak{Z}^k = \mathfrak{K}^k \cap \mathfrak{Z}^k = (\mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}') \cap \mathfrak{Z}^k.$$

Nun gehört aber ein Element aus $\mathfrak{D}^k + \mathfrak{D}'$ dann und nur dann zu $\mathfrak{Z}^k$, wenn seine $\mathfrak{D}'$-Komponente zu $\mathfrak{Z}^k$ gehört. Bezeichnen wir daher den Modul $\mathfrak{D}' \cap \mathfrak{Z}^k$ mit $\mathfrak{B}^k$, so gilt

$$\mathfrak{Z}^k = \mathfrak{D}^k + \mathfrak{B}^k, \tag{2}$$

wo die Summe wieder direkt ist. $\mathfrak{B}^k$ ist als Durchschnitt zweier Grundmoduln selbst Grundmodul.

Der Modul $\mathfrak{R}^k$ der Ränder ist zwar Untermodul von $\mathfrak{D}^k$, aber im allgemeinen kein Grundmodul. Daher kann man $\mathfrak{D}^k$ nicht mehr entsprechend direkt zerlegen; denn jeder direkte Summand eines Grundmoduls ist selbst Grundmodul.

Für die Homologiegruppe $\mathfrak{Z}^k/\mathfrak{R}^k$ bedeutet die Zerlegung (2)

$$\mathfrak{Z}^k/\mathfrak{R}^k = \mathfrak{D}^k/\mathfrak{R}^k + \mathfrak{B}'^k, \tag{3}$$

wobei

$$\mathfrak{B}'^k \cong \mathfrak{B}^k$$

ist, die direkte Summenzerlegung in Torsionsgruppe und Bettimodul.

In jedem der drei Moduln $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D}$ (der Einfachheit halber lassen wir den Dimensionsindex weg) wählen wir nun eine Steinitzsche Normalbasis (Steinitz [1], S. 350), etwa die Ketten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}'_l$ aus $\mathfrak{U}$ (l = Rang von $\mathfrak{U}$), $\mathfrak{x}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{l+m}, \mathfrak{x}'_{l+m}$ aus $\mathfrak{B}$ (m = Rang von $\mathfrak{B}$) und $\mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k}, \mathfrak{x}'_{a_k}$ aus $\mathfrak{D}$. Dann bilden die Koeffizienten dieser Ketten eine Matrix von $\alpha_k + 3$ Zeilen und α_k Spalten. Da die Moduln Grundmoduln sind, sind die größten gemeinsamen Teiler der Elemente einer Zeile (1), außer für die Zeilen $\mathfrak{x}_l$, $\mathfrak{x}'_l$, $\mathfrak{x}_{l+m}$, $\mathfrak{x}'_{l+m}$, $\mathfrak{x}_{a_k}$ und $\mathfrak{x}'_{a_k}$. $\mathfrak{x}_l$ besitze den größten Teiler q_l. Dann ist q_l gleichzeitig der höchste Determinantenteiler der Zeilen $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_l$. $\mathfrak{x}'_l$ ist zu $\mathfrak{x}_l$ proportional und sein größter Teiler q'_l zu q_l teilerfremd. Die Idealklasse von q_l^{-1} bzw. $q_l'^{-1}$ ist die Klasse des Moduls $\mathfrak{U}$. Entsprechendes gilt für die Zeilen der beiden anderen Moduln.

Zur Vereinfachung wollen wir aus jeder der drei Normalbasen die letzte Zeile weglassen und die so verkürzte Normalbasis als Quasibasis bezeichnen. Dann erhält man aus den Koeffizienten der drei Quasibasen eine quadratische Matrix X. Die auftretenden Zeilenfaktoren q_l, q_{l+m}, q_{a_k} sind nun im allgemeinen natürlich keine Hauptideale, falls nämlich nicht alle drei Moduln der Hauptklasse angehören. Die darin liegende Schwierigkeit kann man am einfachsten durch Einführung eines Systems idealer Zahlen über K (vgl. Hecke, Theorie der algebraischen Zahlen, S. 122) überwinden.

Sei also Ω ein Zahlkörper endlichen Grades über K, in dem jedes Ideal aus K Hauptideal wird. Wir müssen dann für den Augenblick Ketten $\mathfrak{y}^k$ mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω zulassen

$$\mathfrak{y}^k = \sum_{i=1}^{a_k} \omega_i \mathfrak{a}_i^k, \tag{4}$$

wobei ω_i ganz-algebraisch aus Ω ist. Ihre Berandungsrelationen werden durch die üblichen Forderungen

$$(\mathfrak{y}_1^k + \mathfrak{y}_2^k)\cdot = \dot{\mathfrak{y}}_1^k + \dot{\mathfrak{y}}_2^k \text{ und } (\omega\,\mathfrak{y}^k)\cdot = \omega\,\dot{\mathfrak{y}}^k \tag{5}$$

auf die der $\mathfrak{a}_i^k$ zurückgeführt. Für diese Zellen verwenden wir ihren alten Rand, der durch den Homomorphismus φ aus dem Homotopierand entstanden ist. Die dabei auftretenden Koeffizienten aus $\mathfrak{X}$ sind ja auch Zahlen aus Ω. Analog definieren wir die Ketten $\tilde{\mathfrak{y}}^k = \sum_j \omega_j \tilde{\mathfrak{a}}_j^k$. Ebenso erklären wir Schnittzahlen zwischen den $\mathfrak{y}^k$ und $\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}$ durch die Regeln

$$S(\sum_i \mathfrak{y}_i^k,\ \sum_j \tilde{\mathfrak{y}}_j^{n-k}) = \sum_{i,j} S(\mathfrak{y}_i^k,\ \tilde{\mathfrak{y}}_j^{n-k}) \tag{6a}$$

und

$$S(\omega_1\,\mathfrak{y}^k,\ \omega_2\,\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}) = \omega_1\, S(\mathfrak{y}^k, \tilde{\mathfrak{y}}^{n-k})\,\bar{\omega}_2 \tag{6b}$$

und die Forderung, für die $S(\mathfrak{a}_i^k, \tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k})$ die alten Schnittzahlen zu verwenden. $\bar{\omega}$ bedeutet dabei die konjugiert-komplexe Zahl zu ω. Ersichtlich kommen dann die Ketten $\mathfrak{x}_k$ unter den $\mathfrak{y}_k$ vor, und alle Eigenschaften, die sie bezüglich Berandung und Schnitt als $\mathfrak{y}$-Ketten besitzen, kommen ihnen auch als $\mathfrak{x}$-Ketten zu.

Der Modul $\mathfrak{K}_\Omega^k$ aller k-dimensionalen Ketten $\mathfrak{y}^k$ läßt sich entsprechend wie $\mathfrak{K}^k$ selbst zerlegen in eine direkte Summe

$$\mathfrak{K}_\Omega^k = \mathfrak{D}_\Omega^k + \mathfrak{B}_\Omega^k + \mathfrak{U}_\Omega^k. \tag{7}$$

Dabei wird man wegen der Unabhängigkeit linearer Beziehungen gegenüber Körpererweiterung erwarten, daß z. B. $\mathfrak{D}_\Omega$ einfach der von $\mathfrak{D}$ über der Hauptordnung von Ω erzeugte Modul ist. Das ist tatsächlich richtig; denn zunächst ist offenbar $\mathfrak{D}$ in $\mathfrak{D}_\Omega$ enthalten. Ferner erzeugt $\mathfrak{D}$ über der Hauptordnung von Ω einen Grundmodul vom gleichen Rang wie $\mathfrak{D}$. Die Grundmoduleigenschaft kann ja durch Elementarteiler charakterisiert werden. Andrerseits ist $\mathfrak{D}_\Omega$ ebenfalls Grundmodul vom gleichen Rang wie $\mathfrak{D}$, da ja sein Rang schon durch die Berandungsmatrix der Zellen $\mathfrak{a}_i^{k+1}$ bestimmt ist. Dann muß aber $\mathfrak{D}_\Omega$ mit dem von $\mathfrak{D}$ über Ω erzeugten Modul identisch sein. Dasselbe gilt auch für $\mathfrak{B}_\Omega$ und $\mathfrak{U}_\Omega$.

Daher gehört der Modul $\mathfrak{D}_\Omega$ der Hauptklasse an, und man erhält als eine linear unabhängige Basis für ihn die Ketten $\mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k-1}, \frac{1}{q_{a_k}} \cdot \mathfrak{x}_{a_k}$. q_{a_k} ist ja Hauptideal in Ω und kann daher in Ω

herausgekürzt werden. Wir bezeichnen dabei der Kürze halber eine das Hauptideal $\mathfrak{q}_{a_k}$ in Ω darstellende Zahl selbst mit $\mathfrak{q}_{a_k}$, da es auf die Auswahl unter assoziierten nicht ankommt. Dasselbe gilt auch für die $\mathfrak{B}_\Omega$ und $\mathfrak{U}_\Omega$.

Die Ketten $\mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{l-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_l} \cdot \mathfrak{x}_l, \mathfrak{x}_{l+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{l+m-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \mathfrak{x}_{l+m}, \mathfrak{x}_{l+m+1}, \ldots, \mathfrak{x}_{a_k-1}, \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}} \cdot \mathfrak{x}_{a_k}$ bilden also eine linear unabhängige Basis von $\mathfrak{K}_\Omega$ und ihre Koeffizientenmatrix X_1 entsteht aus X, indem man aus der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten Zeile die größten Faktoren $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$ und $\mathfrak{q}_{a_k}$ heraushebt. X_1 ist als Matrix einer linear unabhängigen Basis von $\mathfrak{K}_\Omega$ unimodular.

Genau wie im ganzrationalen Fall gibt es nun zu jeder linear unabhängigen Basis von $\mathfrak{K}_\Omega^k$ eine eindeutig bestimmte duale Basis der Ketten $\tilde{\mathfrak{y}}^{n-k}$ von $\tilde{\mathfrak{K}}_\Omega^{n-k}$, so daß die Schnittmatrix für die beiden Basen die Einheitsmatrix ist. Die duale Basis hat bezüglich der dualen Zellen $\tilde{\mathfrak{a}}_j^{n-k}$ die zu X_1 kontragredient-konjugierte Koeffizientenmatrix $\overline{X}_1'^{-1}$. Ihre l ersten Ketten bilden eine linear unabhängige Basis von $\tilde{\mathfrak{D}}_\Omega^{n-k}$, die nächsten m Ketten eine linear unabhängige Basis von $\tilde{\mathfrak{B}}_\Omega^{n-k}$ und die letzten Ketten eine solche von $\tilde{\mathfrak{U}}_\Omega^{n-k}$.

Vergleichen wir nun X_1^{-1} und X^{-1}. Der Übergang von X zu X_1 geschah durch Division der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten Zeile durch $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$, $\mathfrak{q}_{a_k}$. Die Unterdeterminanten der Elemente einer Zeile, die von diesen drei Zeilen verschieden ist, nehmen daher den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{q}_l} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}}$ auf, ebenso aber auch die Gesamtdeterminante, so daß die betreffenden Spalten der Matrizen X_1^{-1} und X^{-1} übereinstimmen. Für die Elemente der l-ten Zeile nehmen die Unterdeterminanten nur den Faktor $\frac{1}{\mathfrak{q}_{l+m}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{q}_{a_k}}$ auf, so daß die l-te, $(l+m)$-te und letzte Spalte von X_1^{-1} aus der entsprechenden Spalte von X^{-1} durch Multiplikation mit $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_{l+m}$, $\mathfrak{q}_{a_k}$ hervorgeht. Daher sind in $\overline{X}_1'^{-1}$ alle Zeilen außer der l-ten, $(l+m)$-ten und letzten ganzzahlig aus dem Körper K. Die l-te Zeile von $\overline{X}_1'^{-1}$ entsteht zwar aus der l-ten Zeile von $\overline{X}'^{-1}$ durch Multiplikation mit $\bar{\mathfrak{q}}_l$, aber in $\overline{X}'^{-1}$ war die l-te Zeile nicht ganzzahlig, so daß die l-te Zeile in $\overline{X}_1'^{-1}$ keineswegs den Faktor $\bar{\mathfrak{q}}_l$ besitzt, vielmehr sind ihre Elemente teilerfremd; denn $\overline{X}_1'^{-1}$ ist ja wie X_1 unimodular. Dasselbe gilt für die $(l+m)$-te und letzte Zeile von $\overline{X}_1'^{-1}$.

Wir betrachten insbesondere den Bettimodul $\mathfrak{B}^k$ und den dualen $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$. Für $\tilde{\mathfrak{B}}_\Omega^{n-k}$ besitzen wir eine linear unabhängige Basis, die mit der oben konstruierten Basis von $\mathfrak{B}_\Omega^k$ die Einheitsmatrix als Schnittmatrix hat. Die Basis von $\mathfrak{B}_\Omega^k$ entstand dabei aus einer Quasibasis von $\mathfrak{B}^k$ durch Herausheben des größten Idealfaktors der letzten Kette.

Wir müssen nun zusehen, ob dasselbe auch für die duale Basis von $\tilde{\mathfrak{B}}_{\Omega}^{n-k}$ zutrifft. Ihre Ketten sind ja schon bis auf die letzte als ganzzahlige Ketten aus K erkannt. Sei die letzte etwa $\sum_{1}^{a_k} \omega_j \tilde{\alpha}_j^{n-k}$ mit ganz-algebraischen ω_j aus Ω, so ist, wie wir oben sahen, $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k}) = 1$. Ferner entsteht die Zeile $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k}$ aus einer Zeile mit (gebrochenen) Koeffizienten aus K durch Multiplikation mit $\bar{\mathfrak{q}}$. Also ist die Zeile $\left(\frac{\omega_1}{\bar{\mathfrak{q}}}, \frac{\omega_2}{\bar{\mathfrak{q}}}, \ldots, \frac{\omega_{a_k}}{\bar{\mathfrak{q}}}\right)$ aus K. Sei nun $\mathfrak{f}$ irgendein ganzes Ideal aus der reziproken Klasse von $\mathfrak{q}$, also $\mathfrak{q}\mathfrak{f} \sim 1$ und damit auch $\bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{f}} \sim 1$, so kann man diese letzte Zeile als $\frac{1}{\bar{\mathfrak{q}}\bar{\mathfrak{f}}} (\omega_1 \bar{\mathfrak{f}}, \omega_2 \bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k} \bar{\mathfrak{f}})$ schreiben. Die Zeile $(\omega_1 \bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k} \bar{\mathfrak{f}})$ ist nun einerseits ganz, andrerseits aus K. Ihr größter Teiler ist $\bar{\mathfrak{f}}$, und durch Herausheben dieses größten Teilers entsteht tatsächlich gerade $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k})$.

Es bleibt noch zu zeigen, daß die ganzzahligen ersten Ketten aus K mit der letzten Kette $(\omega_1 \bar{\mathfrak{f}}, \omega_2 \bar{\mathfrak{f}}, \ldots, \omega_{a_k} \bar{\mathfrak{f}})$ zusammen wirklich eine Quasibasis von $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ bilden. Dies ist aber sofort klar; denn in Ω war der höchste Determinantenteiler der aus den ersten ganzzahligen Zeilen und $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{a_k})$ gebildeten Matrix gleich 1, da sie ja eine Basis des Grundmoduls $\tilde{\mathfrak{B}}_{\Omega}^{n-k}$ bildeten. Also ist der höchste Determinantenteiler der in Frage stehenden Ketten gleich $\bar{\mathfrak{f}}$, d. h. gleich dem größten Faktor der letzten Kette. Das aber charakterisiert gerade (zusammen mit dem richtigen Rang) die Quasibasen eines Grundmoduls. In der Tat kann man sie sofort zu einer Steinitzschen Normalbasis des Grundmoduls $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ ergänzen. Man braucht nur irgendeine zur letzten Kette proportionale Kette mit dem größten Faktor $\bar{\mathfrak{f}}' \sim \bar{\mathfrak{f}}$ mit $(\bar{\mathfrak{f}}', \bar{\mathfrak{f}}) = 1$ hinzuzufügen.

Für die Schnittzahl zwischen den beiden letzten Ketten der Quasibasen $\mathfrak{B}^k$ und $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ erhält man offenbar $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, denn durch Multiplikation der ersten Kette mit $\frac{1}{\mathfrak{q}}$ und der zweiten mit $\frac{1}{\mathfrak{f}}$ erhält man Ketten in Ω mit der Schnittzahl 1.

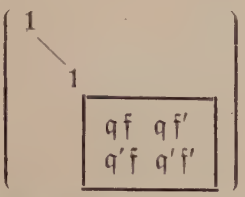
Ergänzt man die Quasibasen von $\mathfrak{B}^k$ und $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$ noch jeweils zu einer Steinitzschen Normalbasis, indem man je eine weitere zu den entsprechenden letzten Ketten proportionale Kette hinzunimmt, deren größte Faktoren $\mathfrak{q}'$ bzw. $\bar{\mathfrak{f}}'$ seien, mit

$$\begin{aligned} &\mathfrak{q} \sim \mathfrak{q}'; \quad (\mathfrak{q}, \mathfrak{q}') = 1 \\ &\mathfrak{f} \sim \mathfrak{f}'; \quad (\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1, \end{aligned} \tag{8}$$

so erhält man den

Satz 7. *Zu jeder Steinitzschen Normalbasis von $\mathfrak{B}^k$ gibt es eine Steinitzsche Normalbasis des dualen Bettimoduls $\tilde{\mathfrak{B}}^{n-k}$, für die die*

Schnittmatrix die Gestalt

(9) 

hat. $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}'$ *sind die größten Faktoren der letzten Ketten der Normalbasis von* $\mathfrak{B}^k$, $\mathfrak{f}, \mathfrak{f}'$ *sind innerhalb der Bedingungen* $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{f}' \sim \mathfrak{q}^{-1}$ *und* $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1$ *willkürlich vorschreibbar.* $\bar{\mathfrak{f}}, \bar{\mathfrak{f}}'$ *sind dann die größten Faktoren der letzten Ketten der Normalbasis von* $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$.

Entsprechende Normalformen lassen sich natürlich auch für die Schnittmatrizen von $\mathfrak{U}^k$ mit $\bar{\mathfrak{D}}^{n-k}$ und von $\mathfrak{D}^k$ mit $\bar{\mathfrak{U}}^{n-k}$ angeben.

Wir wollen zunächst aus dem Satz 7 nur eine einzige Folgerung ziehen, von der wir dann im nächsten Paragraphen sehen werden, daß sie umgekehrt die ganze oben entwickelte Theorie umfaßt, nämlich

Satz 8. *Sei* $\mathfrak{S}$ *die Schnittmatrix irgendeines Erzeugendensystems von* $\mathfrak{B}^k$ *mit irgendeinem Erzeugendensystem von* $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$, *so ist der Zeilenmodul von* $\mathfrak{S}$ *Grundmodul.*

Beweis. Für die in Satz 7 auftretenden Basen ist der Satz 8 klar; denn man erkennt unmittelbar, daß die Elementarteiler der Matrix (9) alle gleich (1) sind. Die Elemente irgendeines Erzeugendensystems von $\mathfrak{B}^k$ aber können linear mit ganz-algebraischen Koeffizienten durch die Elemente der Normalbasis von Satz 7 ausgedrückt werden, ebenso wie umgekehrt diese durch jene. Dasselbe gilt für die Elemente von $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$. Wegen der Linearität der Schnittzahlen sind dann alle Schnittmatrizen bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{B}^k$ und $\bar{\mathfrak{B}}^{n-k}$ wechselseitig teilbar, d. h. es bestehen zwischen den entsprechenden Schnittmatrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Relationen

$$\mathfrak{T} = P\mathfrak{S}Q \text{ und } \mathfrak{S} = R\mathfrak{T}S$$

mit ganzzahligen Matrizen P, Q, R, S aus $\mathfrak{X}$. Dann sind aber die Elementarteiler der Matrizen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ gleich, und damit ist Satz 8 allgemein bewiesen.

Etwas anschaulicher läßt sich der Inhalt von Satz 8 fassen, wenn man für den Augenblick auch Ketten mit beliebigen gebrochenen Koeffizienten aus K zuläßt und für sie — ähnlich wie oben für die Ketten mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω — Berandung und Schnitt erklärt durch analoge Gleichungen wie (5) und (6). Dann ist nämlich Satz 8 äquivalent mit

Satz 9. *Sind die sämtlichen Schnittzahlen zwischen der Kette* $\mathfrak{y}^k$ *mit beliebigen Koeffizienten aus* K *und den ganzzahligen Ketten* $\bar{\mathfrak{x}}^{n-k}$ *ganz, so ist* $\mathfrak{y}^k$ *selbst ganzzahlige Kette.*

Beweis. $\mathfrak{y}^k$ ist eine Linearkombination der Basisketten mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus K. Die entsprechende Linearkombination der Zeilen der Schnittmatrix liefert dann die Schnittzahlen von $\mathfrak{y}^k$ mit einem Erzeugendensystem der Ketten $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k}$. Sind diese Schnittzahlen alle ganz, so ist diese Zeile wegen der Grundmoduleigenschaft der Schnittmatrix mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus den Zeilen der Schnittmatrix kombinierbar. Es gibt daher eine ganzzahlige Kette $\mathfrak{y}^{k'}$, die die gleichen Schnittzahlen wie $\mathfrak{y}^k$ hat. Dann müssen aber beide identisch sein; denn ihre Differenz hat lauter Schnittzahlen Null, und man sieht an der Normalform (9) sofort, daß es keine Kette $\neq 0$ gibt, für die alle Schnittzahlen verschwinden.

Gilt umgekehrt Satz 9, so enthält jede Linearkombination der Zeilen von $\mathfrak{S}$ mit eventuell gebrochenen Koeffizienten aus K, die selbst ganz ist, Schnittzahlen einer ganzzahligen Kette $\mathfrak{y}^k$. Diese läßt sich ganzzahlig durch die Elemente der Basis ausdrücken, und daher läßt sich die entsprechende Schnittzahlenzeile ebenfalls ganzzahlig aus den Zeilen von $\mathfrak{S}$ kombinieren, ist also im Zeilenmodul enthalten. Also ist der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ Grundmodul.

Bisher haben wir nun immer die Elemente von $\mathfrak{B}$ und $\tilde{\mathfrak{B}}$ als Linearformen in den $\mathfrak{a}_i^k$ angesehen. Wir können aber den Satz 8 auch so formulieren, daß jede Bezugnahme auf eine spezielle Darstellung der Elemente von $\mathfrak{B}$ vermieden wird, vielmehr diese Elemente nur als Elemente einer abstrakten Operatorgruppe vom Modultypus auftreten.

Da kein Element $\neq 0$ von $\mathfrak{B}$ von endlicher Ordnung ist, gibt es für ein bestimmtes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{B}$ und eine bestimmte ganz-algebraische Zahl $x \neq o$ höchstens ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$, für das $b = xb_1$ ist. Man kann daher $b_1 = \frac{1}{x} \cdot b$ setzen. Betrachtet man nun für ein festes Element $b \neq 0$ aus $\mathfrak{B}$ alle ganzen und gebrochenen Zahlen $\nu = x_1/x_2$ (x_i ganz), für die $\nu . b$ existiert, d. h. für die es ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$ gibt, so daß $x_1 b = x_2 b_1$ ist. Die Gesamtheit der Zahlen ν mit dieser Eigenschaft bilden ein gebrochenes Ideal $\mathfrak{n}$, das wir den „Nenner" des Elements b nennen. Der Zusammenhang dieses Nenners mit unseren obigen Überlegungen beruht nun auf folgender Tatsache:

Hat man die abstrakte Operatorgruppe $\mathfrak{B}$ vom Modultypus irgendwie als Linearformenmodul dargestellt (mit Darstellung ist hier immer eine treue Darstellung gemeint) und ist dieser Linearformenmodul Grundmodul (eine solche Darstellung des Modultypus $\mathfrak{B}$ gibt es immer (vgl. Steinitz [2], S. 386)), so sei $\mathfrak{t}$ der größte gemeinsame Teiler der Koeffizienten des Elements b. Dann ist $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$.

Beweis. Ist ν aus $\mathfrak{n}$, dann gibt es nach Definition ein Element b_1 aus $\mathfrak{B}$ mit $\nu b = b_1$. Daher ist das Produkt νt von ν mit irgendeinem Koeffizienten t von b ganz, also $\nu \mathfrak{t}$ ganz, d. h. ν gehört zu $1/\mathfrak{t}$, wenn man noch beachtet, daß $\mathfrak{t} = (o)$ nur für $b = 0$ eintritt.

Ist umgekehrt ν eine Zahl aus dem Ideal 1/t, so ist insbesondere νt ganz für alle Koeffizienten t von b; dann ist die Linearform mit den Koeffizienten νt ganzzahlig und der Linearform von b proportional. Da aber der Linearformenmodul als Grundmodul vorausgesetzt war, gehört diese Linearform ebenfalls zu ihm, und für das entsprechende Element b_1 von $\mathfrak{B}$ gilt dann offenbar $b_1 = \nu b$, d. h. die Zahl ν gehört zum Nenner $\mathfrak{n}$ von b.

Nun haben wir oben gesehen, daß kein Element $b \neq 0$ von $\mathfrak{B}$ mit allen Elementen eines Erzeugendensystems von $\tilde{\mathfrak{B}}$ die Schnittzahlen Null haben kann. Ordnet man daher jedem Element von $\mathfrak{B}$ den Zeilenvektor zu, der aus den Schnittzahlen von b mit den Elementen eines Erzeugendensystems von $\tilde{\mathfrak{B}}$ besteht, so ist dies eine treue Darstellung und zwar nach Satz 8 eine Grundmoduldarstellung von $\mathfrak{B}$. Das Ideal t besteht dann genau aus allen Schnittzahlen des festen Elements b mit allen Elementen von $\tilde{\mathfrak{B}}$. Daher haben wir den

Satz 10. *Ist t irgendeine Zahl aus dem reziproken Nenner* 1/$\mathfrak{n}$ *des Gruppenelements b, so gibt es ein Gruppenelement $\tilde{b}$ aus $\tilde{\mathfrak{B}}$, so daß*

$$S(b, \tilde{b}) = t \tag{10}$$

ist.

Das ist aber genau das Analogon zum Axiom S 2, wie es im § 1 umgeformt wurde. Und es bleibt jetzt zu zeigen, daß darin tatsächlich die ganze oben entwickelte Theorie enthalten ist.

§ 4.

Gruppen mit Schnittrelation.

Es seien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ zwei Abelsche Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ des Kreiskörpers K mit je endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ uud $\mathfrak{H}$ sei eine Schnittrelation erklärt, d. h. jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei als Schnittzahl $S(g, h)$ eine Zahl aus $\mathfrak{X}$ zugeordnet. Diese Schnittrelation genüge den folgenden Axiomen:

Axiom S 1. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei

$$S(g_1 + g_2, h) = S(g_1, h) + S(g_2, h) \tag{1a}$$

und ebenso

$$S(g, h_1 + h_2) = S(g, h_1) + S(g, h_2) \tag{1b}$$

und für alle ganz-algebraischen x aus K sei

$$S(x_1 g, x_2 h) = x_1 S(g, h) \bar{x}_2,$$

wobei $\bar{x}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu x ist.

Axiom $S\,2'$. Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$S(g, h) \neq o$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Dann folgt sofort der

Satz 11. *Alle Elemente* $\neq 0$ *von* $\mathfrak{G}$ *und* $\mathfrak{H}$ *haben die Ordnung* (o).

Beweis. Ist $g \neq 0$, so gibt es nach Axiom $S\,2'$ ein h aus $\mathfrak{H}$ mit $S(g, h) \neq o$, und daher folgt aus $xg = 0$ über $S(xg, h) = S(0, h) = o = xS(g, h)$ sofort $x = o$.

$\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind also Operatorgruppen vom Modultypus. Daher können wir wie oben zu Ende des vorigen Paragraphen für jedes Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ den Nenner $\mathfrak{n}$ definieren als das Ideal aller ganzen und gebrochenen Zahlen ν, für die νg existiert. $\mathfrak{n}$ enthält immer die Zahl 1 und ist daher das reziproke eines ganzen Ideals. Wir können nun wieder das Axiom $S\,2'$ verschärfen zum

Axiom $S\,2$. Ist t irgendeine Zahl aus dem reziproken Nenner $1/\mathfrak{n}$ von g, so gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$S(g, h) = t$$

und entsprechend für jedes Element h aus $\mathfrak{H}$.

Nun kommt es offenbar zunächst darauf an, den Gedankengang zu Ende des vorigen Paragraphen umzukehren, also von Satz 10 nach Satz 8 zurückzugelangen. Das geht aber sofort, wenn man bemerkt, daß im ersten Teil des Beweises der Tatsache $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$ die Grundmoduleigenschaft der Schnittmatrix gar nicht benutzt wurde. Hier können wir daher etwa folgendermaßen schließen:

Sei g ein festes Element $\neq 0$ aus $\mathfrak{G}$, dann bilden die Schnittzahlen von g mit allen Elementen h aus $\mathfrak{H}$ ein ganzes Ideal $\mathfrak{t}$, das z. B. erzeugt wird durch die Schnittzahlen von g mit einem Erzeugendensystem von $\mathfrak{H}$. Betrachten wir irgendeine Zahl aus dem Ideal $\mathfrak{t}$, etwa $S(g, h)$. Ist dann $\nu = x_1/x_2$ mit ganz-algebraischen x_1, x_2 eine Zahl aus dem Nenner $\mathfrak{n}$ von g, so gibt es nach Definition von $\mathfrak{n}$ ein Element g' aus $\mathfrak{G}$ mit $x_1 g = x_2 g'$. Dann ist aber $S(x_1 g, h) = x_1 S(g, h) = S(x_2 g', h) = x_2 S(g', h)$, also $(x_1/x_2)\,S(g, h)$ ganz-algebraisch. Es ist also $S(g, h) \cdot \mathfrak{n}$ ganz, d. h. $\mathfrak{t}$ gehört zu $1/\mathfrak{n}$. Andererseits besagt das Axiom $S\,2$ gerade, daß $1/\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{t}$ gehört. Daher haben wir den

Satz 12. *Das Ideal* $\mathfrak{t}$ *der Schnittzahlen eines festen Elements* $g \neq 0$ *aus* $\mathfrak{G}$ *mit allen Elementen* h *aus* $\mathfrak{H}$ *ist der reziproke Nenner* $1/\mathfrak{n}$ *von* g. *Entsprechendes gilt für jedes Element* $h \neq 0$ *aus* $\mathfrak{H}$.

Sei nun $\mathfrak{S}$ die Schnittmatrix irgendeines Erzeugendensystemes $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ mit einem Erzeugendensystem $h_1, \ldots, h_m$ von $\mathfrak{H}$. Dann liefert offenbar der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ nach (1) und (2) eine Darstellung von $\mathfrak{G}$, die nach Axiom $S\,2'$ treu ist. Man bemerkt nun noch, daß zum Beweis der Tatsache $\mathfrak{n} = 1/\mathfrak{t}$ im vorigen Paragraphen

die Grundmoduleigenschaft des Linearformenmoduls nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig ist. Wir können dies hier etwa so darstellen: Es entspreche dem Element $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ im Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ die Zeile $(t_1, \ldots, t_m)$. Sei $\nu \,.\, (t_1, \ldots, t_m) = (b_1, \ldots, b_m)$ eine proportionale ganzzahlige Zeile mit eventuell gebrochenem ν, so gehört offenbar ν zum reziproken Ideal $1/\mathfrak{t}$, also zu $\mathfrak{n}$. Es gibt daher ein g' aus $\mathfrak{G}$ mit $g' = \nu \,.\, g$. Für dessen Schnittzahlen aber gilt dann $S(g', h_i) = \nu \,.\, t_i = b_i$. Die Zeile $(b_1, \ldots, b_m)$ ist also eine Schnittzahlenzeile und gehört daher zum Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$. Dieser Zeilenmodul ist also Grundmodul. Damit haben wir tatsächlich den Satz 8 wieder erreicht, den wir nochmals formulieren als

Satz 13. *Für jedes Gruppenpaar mit Schnittrelation sind die Elementarteiler der Schnittmatrix bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sämtlich gleich 1.*

Wir haben gesehen, daß der Zeilenmodul von $\mathfrak{S}$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}$ als Linearformenmodul ist; daher ist der Rang von $\mathfrak{S}$ gleich dem von $\mathfrak{G}$ und die Spaltenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der Klasse von $\mathfrak{G}$ (Steinitz [2], S. 336). Damit und durch Satz 13 sind aber sämtliche Invarianten von $\mathfrak{S}$ (im Sinne von Steinitz [1], S. 352) durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ bestimmt. Es folgt der

Satz 14. *Die Schnittmatrizen $\mathfrak{S}$ bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind wechselseitig teilbar.*

Natürlich hätten wir diesen Satz auch hier genau so wie im vorigen Paragraphen beweisen können.

Ebenso wie durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ lassen sich die Invarianten von $\mathfrak{S}$ auch durch die von $\mathfrak{H}$ charakterisieren. Und zwar ist der Rang von $\mathfrak{S}$ gleich dem Rang von $\mathfrak{H}$ und die Zeilenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der zur Klasse von $\mathfrak{H}$ konjugierten Klasse. Damit ist aber auch die Struktur von $\mathfrak{H}$ eindeutig durch die von $\mathfrak{G}$ bestimmt.

Satz 15. *Die beiden Komponenten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ eines Gruppenpaares mit Schnittrelation haben den gleichen Rang und konjugiert-reziproke Klassen.*

Man hat nämlich nur zu beachten, daß das Produkt der Zeilen- und Spaltenklasse von $\mathfrak{S}$ gleich der Klasse des höchsten Determinantenteilers ist. Dieser aber ist 1, da alle Elementarteiler gleich 1 sind.

Satz 15 ist das genaue Analogon zum Pontrjaginschen Dualitätssatz für gewöhnliche Abelsche Gruppen. Die eindeutige Bestimmtheit der Struktur von $\mathfrak{H}$ durch die von $\mathfrak{G}$ kommt allerdings erst durch Satz 13 zustande, welcher die Elementarteiler der Schnittmatrix festlegt. Das ist auch der eigentliche Grund dafür, daß hier statt des schwächeren Axioms $S2'$ das schärfere Axiom $S2$ verwendet werden muß im Gegensatz zum rationalen Fall. Fordert man nämlich nur das Axiom $S2'$, so ist dies mit beliebigen Elementarteilern von $\mathfrak{S}$ verträglich, und dann ist offenbar die Struktur von $\mathfrak{H}$ keineswegs durch die von $\mathfrak{G}$ allein festgelegt.

Weiter müssen wir nun nur noch feststellen, daß auch jede mit $\mathfrak{S}$ wechselseitig teilbare Matrix $\mathfrak{S}_1$ wirklich als Schnittmatrix für geeignete Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ vorkommt. Sei also etwa

$$P\mathfrak{S}Q = \mathfrak{S}_1 \quad \text{und} \quad P_1\mathfrak{S}_1Q_1 = \mathfrak{S}. \tag{3}$$

Transformiert man das Erzeugendensystem $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ mittels P in $g_1', \ldots, g_{n'}'$ und $h_1, \ldots, h_m$ mittels $\overline{Q}'$ in $h_1', \ldots, h_{m'}'$, so geht $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{S}_1$ über. Daß nun auch $g_1', \ldots, g_{n'}'$ wieder ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist, sieht man am einfachsten so ein: Aus (3) folgt, daß $\mathfrak{S}$ und $P\mathfrak{S}$ wechselseitig linksteilbar sind, d. h. es gilt eine Relation $\mathfrak{S} = P_2(P\mathfrak{S})$. Transformiert man also $g_1, \ldots, g_n$ mittels P, hält aber $h_1, \ldots, h_m$ fest, so erhält man die Schnittmatrix $P\mathfrak{S}$. Transformiert man dann $g_1', \ldots, g_{n'}'$ mit P_2, so erhält man die Gruppenelemente $g_1'', \ldots, g_n''$ von $\mathfrak{G}$, deren Schnittmatrix mit den festen $h_1, \ldots, h_m$ wieder $\mathfrak{S}$ ist. Also muß nach Axiom $S2'$ $g_1'' = g_1$, $g_2'' = g_2$, $\ldots$, $g_n'' = g_n$ sein, d. h. aber, daß $g_1', \ldots, g_{n'}'$ ebenfalls ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ ist. Dasselbe gilt auch für $h_1', \ldots, h_{m'}'$.

Damit erhalten wir nun sofort den Isomorphiesatz

Satz 16. *Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ zwei Gruppenpaare mit Schnittrelation und ist $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$, so ist auch $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}'$ und die beiden Gruppenpaare $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ sind schnittreu isomorph.*

Beweis. Durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{G}'$ sind die Invarianten der Schnittmatrizen bestimmt. Nach der letzten Bemerkung vor Satz 16 kann man dann sowohl in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als auch in $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{H}'$ je ein Erzeugendensystem so wählen, daß die Schnittmatrizen für beide Gruppenpaare identisch werden. Andrerseits entsteht gerade ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$, wenn man die so erhaltenen Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ einander zuordnet; denn die Relationen zwischen den Erzeugenden sind ja in beiden Fällen einfach die Relationen zwischen den Zeilen der Schnittmatrix. Auf dieselbe Weise entsteht ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$. Beide Isomorphismen zusammen ordnen offenbar jedem Elementepaar g, h ein Paar g', h' mit derselben Schnittzahl zu.

Übrigens erkennt man, daß man für den Beweis des Satzes 16 nicht die Tatsache benötigt, daß alle Elementarteiler der Schnittmatrix gleich 1 sind, sondern nur, daß sie überhaupt festgelegt sind.

Schließlich sieht man, daß die Matrix der Normalform (9) des vorigen Paragraphen mit $\mathfrak{S}$ wechselseitig teilbar ist, als für geeignete Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ als Schnittmatrix auftritt.

Ist wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch, handelt es sich also um eine Gruppe mit Eigenschnittrelation, so nehmen wir zu den beiden früheren Axiomen noch das folgende hinzu.

Axiom $S3a$: Es ist für alle g aus $\mathfrak{G}$

$$S(g_1, g_2) = \overline{S(g_2, g_1)}$$

oder $S3b$: Es ist

$$S(g_1, g_2) = -\overline{S(g_2, g_1)}.$$

Es erhebt sich nun wie oben die Frage nach den verschiedenen Typen von Gruppen mit Eigenschnittrelation. Für eine schnittreue Isomorphie zweier Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ mit Eigenschnittrelation ist notwendig und hinreichend, daß es Erzeugendensysteme $g_1, \ldots, g_n$ von $\mathfrak{G}$ und $g_1^{(1)}, \ldots, g_n^{(1)}$ von $\mathfrak{G}^{(1)}$ gibt, bezüglich deren die beiden Eigenschnittmatrizen übereinstimmen. Daß diese Bedingung auch hinreicht, folgt ähnlich wie bei Satz 16. Ordnet man nämlich in diesem Falle die g_i und $g_i^{(1)}$ einander zu, so entsteht ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$, da die Relationen zwischen den Erzeugenden einfach die Relationen zwischen den Zeilen der Schnittmatrix sind. Dieser Isomorphismus ist aber sicherlich schnittreu. Nach dem, was oben über den Übergang zu einem neuen Erzeugendensystem gesagt wurde, kommt also die Bedingung für die beiden Schnittmatrizen $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ von $\mathfrak{G}^{(1)}$ darauf hinaus, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ mit derselben ganzzahligen Matrix $\mathfrak{S}_0$ mittels ganzzahliger Matrizen gemäß

$$A\mathfrak{S}\overline{A}' = \mathfrak{S}_0; \quad B\mathfrak{S}_0\overline{B}' = \mathfrak{S}$$
$$C\mathfrak{S}^{(1)}\overline{C}' = \mathfrak{S}_0; \quad D\mathfrak{S}_0\overline{D}' = \mathfrak{S}^{(1)}$$

zusammenhängen. Das ist aber offenbar gleichbedeutend damit, daß $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ selbst in dieser Weise zusammenhängen.

Im Falle des Axioms $S3a$ ist die Matrix $\mathfrak{S}$ hermitesch. In Analogie zu der Bezeichnungsweise in der Theorie der quadratischen Formen (vgl. Hasse, Crelle 153, S. 12 und 152) können wir dann obige Bedingung so ausdrücken:

Die hermiteschen Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ sind in der Hauptordnung des Körpers K gegenseitig durcheinander darstellbar.

Es handelt sich also (im Gegensatz zu der genannten Arbeit von Hasse) um gegenseitige Darstellbarkeit im Bereich der ganzen Zahlen von K. Gehören die Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ der Hauptklasse an, so kann man sich auf linear unabhängige Erzeugendensysteme beschränken. Die Transformationsmatrizen A, C sind dann unimodular, und das Darstellungsproblem reduziert sich auf das Äquivalenzproblem der hermiteschen Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ in der Hauptordnung von K. Läßt man auch noch gebrochene Koeffizienten aus K als Operatoren für $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ zu, so erhält man das Äquivalenzproblem der Formen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}^{(1)}$ im Körper K.

Im Gegensatz zum rationalen Fall ist hier der Fall des Axioms $S3b$ nicht wesentlich vom obigen verschieden. $\mathfrak{S}$ ist dann alternierend-hermitesch. Ersetzt man aber $\mathfrak{S}$ durch $i.\mathfrak{S}$ so ist $i.\mathfrak{S}$ wieder hermitesch, und für $i.\mathfrak{S}$ lassen sich dann die obigen Überlegungen anstellen.

§ 5.

Gruppen mit Verschlingungsrelation.

Wir haben in § 2 in der üblichen Weise gewisse Zahlen aus K als Verschlingungszahlen zwischen Divisionsrändern eingeführt. Durch repräsentantenweise Definition ergaben sich dann Verschlingungszahlen zwischen den Elementen der Torsionsgruppen k-ter und $(n-k-1)$-ter Dimension. Diese waren (gebrochene) Zahlen aus K mod 1 genommen. Wir wollen zunächst für diese Verschlingungszahlen folgenden Satz beweisen:

Satz 17. *Zu jedem Element* $\neq 0$ *der k-ten Torsionsgruppe gibt es ein Element der* $(n-k-1)$*-dimensionalen Torsionsgruppe, so daß die Verschlingungszahl beider* $\not\equiv o \bmod 1$ *ist.*

Beweis. Die Behauptung des Satzes kommt darauf hinaus, daß es zu jeder Kette $\mathfrak{x}^k$, die Divisionsrand, aber nicht selbst Rand ist, einen Divisionsrand $\tilde{\mathfrak{x}}^{n-k-1}$ gibt, so daß $V(\mathfrak{x}^k, \tilde{\mathfrak{x}}^{n-k-1}) \not\equiv o \bmod 1$ ist. Sei etwa $d \cdot \mathfrak{x}^k = \mathfrak{x}^{k+1}$. Dann kann $\mathfrak{x}^{k+1}$ als Kette aus $\mathfrak{U}^{k+1}$ genommen werden (vgl. § 3). Benutzen wir nun für die Schnittmatrix zwischen $\mathfrak{U}^{k+1}$ und $\tilde{\mathfrak{D}}^{n-k-1}$ die in § 3, Satz 7 angegebene Normalform (9). Seien die dabei auftretenden Normalbasen für $\mathfrak{U}^{k+1}$ $\mathfrak{x}_1^{k+1}, \ldots, \mathfrak{x}_l^{k+1}, \mathfrak{x}_l'^{k+1}$, für $\tilde{\mathfrak{D}}^{n-k-1}$ $\tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-k-1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_l^{n-k-1}, \tilde{\mathfrak{x}}_l'^{n-k-1}$, und sei $\mathfrak{x}^{k+1} = x_1 \mathfrak{x}_1^{k+1} + \cdots + x_l \mathfrak{x}_l^{k+1} + x_l' \mathfrak{x}_l'^{k+1}$. Die Schnittzahlen zwischen $\mathfrak{x}^{k+1}$ und $\tilde{\mathfrak{x}}_1^{n-k-1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{x}}_l^{n-k-1}, \tilde{\mathfrak{x}}_l'^{n-k-1}$ sind dann der Reihe nach $x_1, \ldots, x_{l-1}$, $x_l \mathfrak{q} \mathfrak{f} + x_l' \mathfrak{q}' \mathfrak{f}$, $x_l \mathfrak{q} \mathfrak{f}' + x_l' \mathfrak{q}' \mathfrak{f}'$. Dabei mögen wieder die $\mathfrak{q}, \mathfrak{f}, \mathfrak{q}', \mathfrak{f}'$ festgewählte Zahlen aus Ω sein. Sind diese Schnittzahlen nicht alle durch d teilbar, so sind wir fertig; denn dann ist die betreffende Verschlingungszahl $\not\equiv o \bmod 1$. Sind aber alle Schnittzahlen durch d teilbar, so ist wegen $(\mathfrak{f}, \mathfrak{f}') = 1$ die Zahl $x_l \mathfrak{q} + x_l' \mathfrak{q}'$ des Oberkörpers Ω durch d teilbar. Es gibt also eine Kette $(1/d) \cdot \mathfrak{x}^{k+1}$ mit ganz-algebraischen Koeffizienten aus Ω. Ihr Rand ist dann offenbar $\mathfrak{x}^k$. Nun kann man aber die Bedingung für die Existenz einer ganzzahligen Kette, zu der $\mathfrak{x}^k$ Rand ist, als Lösbarkeitsbedingung eines inhomogenen ganzzahligen linearen Gleichungssystems formulieren. Diese ist aber invariant gegenüber Körpererweiterung. Es ist dann also $\mathfrak{x}^k$ Rand einer Kette mit ganzzahligen Koeffizienten aus K.

Dem vorigen Paragraphen entsprechend wollen wir nun eine abstrakte Theorie der Gruppen mit Verschlingungsrelation aufbauen. Es seien also $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ wieder zwei Abelsche Operatorgruppen über der Hauptordnung $\mathfrak{X}$ des Kreiskörpers K mit endlich vielen Erzeugenden. Zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sei eine Verschlingungsrelation erklärt, d. h. jedem Elementepaar g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ ist als Verschlingungszahl $V(g, h)$ eine Zahl des Körpers K mod 1 zugeordnet. Und diese Relation genüge den Axiomen

Axiom $V1$. Für alle g aus $\mathfrak{G}$ und h aus $\mathfrak{H}$ sei

$$V(g_1 + g_2, h) \equiv V(g_1, h) + V(g_2, h) \bmod 1 \tag{1a}$$

$$V(g, h_1 + h_2) \equiv V(g, h_1) + V(g, h_2) \bmod 1 \tag{1b}$$

und für alle ganz-algebraischen Zahlen x aus K sei

$$V(x_1 g, x_2 h) \equiv x_1 V(g,h) \bar{x}_2 \bmod 1, \tag{2}$$

wobei $\bar{x}$ die konjugiert-komplexe Zahl zu x ist.

Axiom $V2$. Zu jedem $g \neq 0$ aus $\mathfrak{G}$ gibt es ein h aus $\mathfrak{H}$ mit

$$V(g,h) \not\equiv o \bmod 1$$

und ebenso zu jedem $h \neq 0$ aus $\mathfrak{H}$ ein g aus $\mathfrak{G}$ mit der gleichen Eigenschaft.

Dann folgt aber sofort der

Satz 18. *Alle Elemente von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ haben endliche Ordnung. $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ sind also endliche Gruppen, da sie endlich viele Erzeugende haben.*

Beweis. Seien $\mathfrak{o}_1, \ldots, \mathfrak{o}_m$ die Ordnungen eines Erzeugendensystems $h_1, \ldots, h_m$ von $\mathfrak{H}$ und o_i irgendeine Zahl aus $\mathfrak{o}_i$ $(i = 1, \ldots, m)$. g sei ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}$. Dann folgt aus $V(g, o_i h_i) \equiv V(g, h_i)\, \bar{o}_i \equiv o$ $(i = 1, \ldots, m)$, daß das Produkt aus $\prod_i \bar{o}_i$ und der Verschlingungszahl $V(g,h)$ von g mit irgendeinem Element h aus $\mathfrak{H}$ ganz ist, d. h. aber nach Axiom $V2$, daß $\prod \bar{o}_i \,.\, g = 0$ ist. g ist also von endlicher Ordnung. Dasselbe gilt für die Elemente h aus $\mathfrak{H}$.

Jede endliche Operatorgruppe $\mathfrak{G}$ über $\mathfrak{X}$ kann nun nach Steinitz [2] S. 353 in eine direkte Summe zyklischer (= einstufiger) Untergruppen zerlegt werden, deren Ordnungen sich sukzessive teilen. Und diese Ordnungen sind durch die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig bestimmt und bestimmen ihrerseits die Struktur von $\mathfrak{G}$ eindeutig. Sie heißen daher die Invarianten von $\mathfrak{G}$. Nehmen wir aus jedem zyklischen Summanden $\neq 0$ ein erzeugendes Element, so wollen wir das so gewonnene Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ eine ausgezeichnete Basis nennen.

Sei $g_1, \ldots, g_s$ eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}$ und $h_1, \ldots, h_{s'}$ eine ebensolche von $\mathfrak{H}$. $\mathfrak{V}$ sei die Verschlingungsmatrix $(V(g_i, h_k))$ bezüglich dieser Basen. Und zwar denken wir die Elemente der Matrix irgendwie als feste Zahlrepräsentanten gewählt. Wir wollen eine solche Matrix mit festen Zahlkoeffizienten einen Repräsentanten der Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V}$ nennen. Dann gilt der

Satz 19. *Jeder Repräsentant der Verschlingungsmatrix bezüglich ausgezeichneter Basen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist quadratisch von der Zeilenzahl s und von nicht-verschwindender Determinante. Insbesondere sind $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von gleicher Stufe (Steinitz [2] S. 319) d. h. $s = s'$.*

Beweis. Ist etwa $s > s'$ oder $s = s'$ aber die Determinante gleich Null, so ist das lineare Gleichungssystem

$$\sum_{i=1}^{s} \xi_i \,.\, V(g_i, h_k) = o \qquad (k = 1, \ldots, s'),$$

wobei die $V(g_i, h_k)$ als Elemente des betrachteten Repräsentanten der Verschlingungsmatrix aufgefaßt werden sollen, in K nichttrivial lösbar. Dann kann man aber ein Vielfaches $(x_1, \ldots, x_s) = c(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ der

Lösung wählen, so daß das Ideal $\mathfrak{t} = (x_1, \ldots, x_s)$ ein vorgegebenes ganzes Ideal aus der Idealklasse von $(\xi_1, \ldots, \xi_s)$ ist. Dann sind insbesondere die x_i selbst ganz. Wählt man nun $\mathfrak{t}$ teilerfremd zur Ordnung $\mathfrak{o}_1$ von g_1, so ist das Element $\sum_{i=1}^{s} x_i g_i$ aus $\mathfrak{G}$ vom Nullelement verschieden, da sonst $x_i \equiv o \pmod{\mathfrak{o}_i}$ $(i = 1, \ldots, s)$ wäre, wo $\mathfrak{o}_i$ die Ordnung von g_i ist. Da diese Ordnungen sich aber sukzessive teilen, wäre dann $x_i \equiv o \pmod{\mathfrak{o}_1}$ für $i = 1, \ldots, s$, also $\mathfrak{t}$ durch $\mathfrak{o}_1$ teilbar entgegen Konstruktion. Für das Element $\sum x_i g_i$ sind aber alle Verschlingungszahlen Null. Das ist ein Widerspruch gegen das Axiom $V2$.

Sei nun $\mathfrak{V}$ die Verschlingungsmatrix bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme. Man kann zu jedem Repräsentanten von $\mathfrak{V}$ beliebig viele Nullzeilen und -spalten hinzufügen und weglassen, indem man zu den Erzeugendensystemen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ genügend oft das Nullelement hinzufügt oder wegläßt. Transformiert man weiter den Repräsentanten durch eine der elementaren Transformationen der Elementarteilertheorie, so erhält man eine Matrix, die ebenfalls Repräsentant der Verschlingungsmatrix eines geeigneten Erzeugendensystems von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ ist. Durch elementare Transformationen sowie Erweitern und Weglassen von Nullzeilen und -spalten kann man aber jede Matrix mit Koeffizienten aus K in eine Normalgestalt

$$A^* = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & & & \\ & \boxed{A_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{A_n} \end{pmatrix} \tag{3}$$

überführen (Krull [1], Franz [1]). Längs der Hauptdiagonalen sind dabei quadratische zweireihige Matrizen vom Rang 1 aneinandergereiht, während außerhalb dieser Kästchen lauter Nullen stehen. Die (ersten und einzigen) Elementarteiler $\mathfrak{e}_i$ der Matrizen A_i teilen sich sukzessive und sind daher die Elementarteiler der Matrix A^*.

Man wähle nun die Erzeugendensysteme in $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ so, daß ein geeigneter Repräsentant der Verschlingungsmatrix $\mathfrak{V}$ die Normalgestalt (3) annimmt. Das zugehörige Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ sei $g_1', g_1'', \ldots, g_n', g_n''$, von $\mathfrak{H}$ entsprechend $h_1', h_1'', \ldots, h_n', h_n''$. Die Elemente g_1', g_1'' bzw. h_1', h_1'' erzeugen Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Für diese Untergruppen definiert die Matrix A_1 eine Verschlingungsrelation. Axiom $V1$ ist unmittelbar klar. Sei weiter $g \neq 0$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{G}_1$, dann gibt es jedenfalls ein Element $h = x_1' h_1' + x_1'' h_1'' + \cdots + x_n'' h_n''$ aus $\mathfrak{H}$ mit $V(g, h) \not\equiv o$. Es ist aber offenbar $V(g, h) \equiv V(g, x_1' h_1' + x_1'' h_1'')$ und $x_1' h_1' + x_1'' h_1''$ aus $\mathfrak{H}_1$, also auch Axiom $V2$ erfüllt.

Bezieht man jetzt die Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ auf ausgezeichnete Basen, so geht A_1 über in eine Matrix $A_1' = P A_1 Q$. Es ist dann Rang

$A_1' \leqq$ Rang A_1. Falls der Rang von A_1' Null ist, bestehen nach Axiom $V2$ die Gruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ nur aus dem Nullelement. Wir denken dann von vornherein die g_1', g_1'' und h_1', h_1'' aus den Erzeugendensystemen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gestrichen. Wir können also Rang $A_1' = 1$ annehmen, und daher besteht nach Satz 19 die ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ nur aus einem Element. $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{H}_1$ sind zyklisch. Dasselbe gilt für die anderen Kästchen A_i $(i = 2, \ldots, n)$. Die Basen von $\mathfrak{G}_i$ bzw. $\mathfrak{H}_i$ für $i = 1, \ldots, n$ zusammengestellt, ergeben dann ein Erzeugendensystem für $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$, für das die Verschlingungsmatrix Diagonalgestalt hat.

Bezeichnen wir das zugehörige Erzeugendensystem von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$ wieder mit $g_1, \ldots, g_n$ bzw. $h_1, \ldots, h_n$. Die Verschlingungszahl $V(g_1, h_1)$ habe dann in dem betrachteten festen Repräsentanten die gekürzte Idealdarstellung $V(g_1, h_1) = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Der Nenner $\mathfrak{q}$ ist jedenfalls für alle Repräsentanten derselbe. Bezeichne x eine beliebige ganz-algebraische Zahl aus K, so ist $x.\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ dann und nur dann ganz, wenn $x \equiv o(\mathfrak{q})$ ist. Andrerseits ist $x.\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ dann und nur dann ganz, wenn $x g_1 = 0$ das Nullelement von $\mathfrak{G}$ ist, d. h. wenn $x \equiv o(\text{ord } g_1)$. Daraus folgt $\mathfrak{q} = \text{ord } g_1$. In der gleichen Weise folgt auch $\text{ord } h_1 = \bar{\mathfrak{q}}$. Dasselbe gilt auch für die Verschlingungszahlen $V(g_i, h_i)$ $(i = 2, \ldots, n)$.

$\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ ist der erste (und einzige) Elementarteiler der Matrix A_1'. Nun ist A_1' durch A_1 teilbar, d. h. $A_1' = PAQ$ mit ganzzahligen Matrizen P, Q. Also ist auch $\mathfrak{p}/\mathfrak{q}$ durch den Elementarteiler $\mathfrak{e}_1$ von A_1 teilbar, also dessen Nenner durch $\mathfrak{q}$ teilbar. Andrerseits ist eine zu A_1 kongruente Matrix durch A_1' teilbar. Ihr Elementarteiler hat aber denselben Nenner wie $\mathfrak{e}_1$, also teilt dieser Nenner umgekehrt auch $\mathfrak{q}$ und ist daher mit $\mathfrak{q}$ identisch. Da sich nun die $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ in der Matrix (3) sukzessive teilen, teilen sich ihre Nenner umgekehrt sukzessive. Und daher sind die Ordnungen $\mathfrak{q}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ der Elemente g_i bzw. $\bar{\mathfrak{q}}$ der Elemente h_i die Invarianten von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$. $g_1, \ldots, g_n$ bzw. $h_1, \ldots, h_n$ bilden also eine ausgezeichnete Basis von $\mathfrak{G}$ bzw. $\mathfrak{H}$. Es ist $n = s$ und wir haben den

Satz 20. *In jedem Gruppenpaar mit Verschlingungsrelation sind die Komponenten $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ von gleicher Stufe und ihre Invarianten zueinander konjugiert.*

Auch die Zähler der Verschlingungszahlen $V(g_i, h_i)$ $(i = 1, \ldots, s)$ lassen sich noch normieren. Wir schließen wieder für $V(g_1, h_1) = \mathfrak{p}/\mathfrak{q}$. Man kann durch geeignete Wahl von g_1 erreichen, daß der Zähler von V ein beliebiges ganzes, zu $\mathfrak{q}$ teilerfremdes Ideal $\mathfrak{p}_1$ der Klasse von $\mathfrak{p}$ wird

$$(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{q}) = 1 \qquad \mathfrak{p}_1 \sim \mathfrak{p} \sim \mathfrak{q}.$$

Geht man nämlich zu einer Zahldarstellung von V über, indem man mit einem ganzen Ideal $\mathfrak{f} \sim \mathfrak{q}^{-1} \sim \mathfrak{p}^{-1}$ erweitert

$$\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{q}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{f}}{\mathfrak{q}\mathfrak{f}},$$

so existieren wegen $(\mathfrak{p}\mathfrak{f}, \mathfrak{q}\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ ganze Zahlen x_1 und x_2, so daß

$$x_1\mathfrak{p}\mathfrak{f} + x_2\mathfrak{q}\mathfrak{f} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{f}$$

wird. Darin sollen jetzt $\mathfrak{p}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{q}\mathfrak{f}$, $\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}$ erzeugende Zahlen der entsprechenden Hauptideale sein. Dann wird

$$x_1 . V \equiv \frac{\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}}{\mathfrak{q}\mathfrak{f}} \bmod 1.$$

Wegen $(\mathfrak{p}_1\mathfrak{f}, \mathfrak{q}\mathfrak{f}) = \mathfrak{f}$ ist aber $(x_1, \mathfrak{q}) = 1$. Daher erzeugt das Element $x_1 g_1$ die gleiche Untergruppe wie g_1 selbst und kann daher statt g_1 in die Basis von $\mathfrak{G}$ aufgenommen werden. Dasselbe gilt für die g_i $(i = 2, \ldots, s)$.

Damit erhalten wir den Isomorphiesatz

Satz 21. *Sind $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ zwei Gruppenpaare mit Verschlingungsrelation und $\mathfrak{G} \cong \mathfrak{G}'$, dann ist auch $\mathfrak{H} \cong \mathfrak{H}'$ und zwar so, daß beide Isomorphismen zusammen einen verschlingungstreuen Isomorphismus zwischen den Paaren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ vermitteln.*

Beweis. Wegen der Isomorphie von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ kann man nach obiger Bemerkung über die Normierung der Zähler der Verschlingungszahlen ausgezeichnete Basen in $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}, \mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$ so wählen, daß die beiden Verschlingungsmatrizen identisch werden. Die Invarianten von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ sind durch die von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ bestimmt, also ebenfalls einander gleich. Ordnet man die eben gewählten ausgezeichneten Basen von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ sowie von $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{H}'$ einander zu, so entsteht ein Isomorphismus zwischen den Gruppenpaaren $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$ und $\mathfrak{G}', \mathfrak{H}'$, bei dem entsprechende Elementepaare gleiche Verschlingungszahlen haben.

Für den Fall, daß wieder $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{G}$ identisch ist, also eine Gruppe mit Eigenverschlingungsvorschrift vorliegt, fordert man wieder dieselben Vertauschbarkeitsaxiome wie bei den Schnittzahlen. Auch hier sind zwei isomorphe Gruppen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ mit Eigenverschlingung dann und nur dann isomorph als Gruppen mit Verschlingung, wenn die Verschlingungsmatrizen bezüglich irgendwelcher Erzeugendensysteme von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}^{(1)}$ übereinstimmen. Ein Beispiel zu einer Eigenverschlingung findet sich im folgenden Paragraphen.

§ 6.

Beispiel.

Als Beispiel betrachten wir die fünfdimensionalen Linsenräume. Sei die fünfdimensionale Einheitssphäre im R_6 gegeben durch

$$|z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1,$$

wobei $z_0 = x_1 + i . x_2$, $z_1 = x_3 + i . x_4$, $z_2 = x_5 + i . x_6$ drei komplexe Variablen bedeuten. g bedeute die Deckbewegung

$$z_k' = \xi^{q_k^{-1}} z_k \qquad (k = o, 1, 2)$$

mit $\zeta = e^{2\pi i/p}$ (p Primzahl, q_k prim zu p, $q_k^{-1} q_k \equiv 1 (p)$). Identifiziert man die Punkte der Sphäre, die durch $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ auseinander hervorgehen, so erhält man den fünfdimensionalen Linsenraum $L(p, q_0, q_1, q_2)$. Die Sphäre ist seine universelle Überlagerung. Benutzen wir für sie die Zellenzerlegung ($j = 0, 1, \ldots, p-1$)

a_j^5	definiert durch		$\frac{2\pi}{p} j < \arg z_2 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$	
a_j^4	„	„	$\arg z_2 = \frac{2\pi}{p} j$	
a_j^3	„	„ $z_2 = 0$	$\frac{2\pi}{p} j < \arg z_1 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$	
a_j^2	„	„ $z_2 = 0$	$\arg z_1 = \frac{2\pi}{p} j$	
a_j^1	„	„ $z_2 = z_1 = 0$	$\frac{2\pi}{p} j < \arg z_0 < \frac{2\pi}{p}(j+1)$	
a_j^0	„	„ $z_2 = z_1 = 0$	$\arg z_0 = \frac{2\pi}{p} j$,	

wobei alle unteren Indizes mod p zu nehmen sind. Dann erhält man als Berandungsrelationen

$$(2) \qquad \dot{a}_j^{2k+1} = a_j^{2k} - a_{j+1}^{2k}; \quad \dot{a}_j^{2k} = a_0^{2k-1} + a_1^{2k-1} + \cdots + a_{p-1}^{2k-1}$$

für $k = 0, 1, 2$ bei geeigneter Orientierung. Dazu kommen für die Homotopieketten noch die Relationen

$$g^{q_k} a_j^{2k+1} = a_{j+1}^{2k+1}; \quad g^{q_k} a_j^{2k} = a_{j+1}^{2k} \quad (k = 0, 1, 2; \; j = 0, \ldots, p-1).$$

Der homomorphe Übergang $g \to 1$ führt auf die Berandungsrelationen des Linsenraumes selbst. Die Homologiegruppe der Dimension 2 (für die Eigenverschlingungen auftreten könnten) besteht nur aus dem Nullelement.

Anders jedoch bei der homomorphen Abbildung $g \to \zeta = e^{2\pi i/p}$, die wir wieder mit φ bezeichnen. Dann werden die Berandungsrelationen

$$\varphi(a_0^3)^{\cdot} = (1 - \zeta^{q_1}) \varphi(a_0^2); \quad \varphi(a_0^2)^{\cdot} = 0.$$

Die zweidimensionale Homologiegruppe wird erzeugt durch das Element $\varphi(a_0^2)$ von der Ordnung $(1 - \zeta^{q_1})$. Hier müssen also Eigenverschlingungszahlen auftreten.

Zu ihrer Berechnung kann man etwa von den Zellen a_0^3 und a_0^2 der Sphäre ausgehen. a_0^2 liegt aber auf dem Rand von a_0^3. Man muß daher a_0^2 durch Addition von Rändern und von Ketten, die bei der Abbildung φ nach Null übergehen, so abändern, daß die abgeänderte Kette mit a_0^3 höchstens noch Nullzellen gemein hat und diese weder auf dem Rand von a_0^3 noch auf dem Rand der abgeänderten Kette liegen. Um dies Verfahren besser zu übersehen, führen wir eine Simplizialunterteilung der Sphäre aus, indem wir in den Zellen a_j^2, a_j^3, a_j^4, a_j^5 jeweils

ihre Mittelpunkte P_j^2, P_j^3, P_j^4, P_j^5 einführen, von denen aus die Sternunterteilung der Zellen ausgeführt wird. Die Nullzellen der ursprünglichen Zellteilung bezeichnen wir noch mit $P_0^0, P_1^0, \ldots, P_{p-1}^0$. Sie sind bereits Simplexe. Die vorkommenden Simplexe werden dann jeweils durch die Angabe ihrer Ecken bezeichnet.

An Stelle der Zelle a_0^2 tritt dann (bei geeigneter Orientierung) die Kette

$$\mathfrak{k} = (P_0^0 P_1^0 P_0^2) + (P_1^0 P_2^0 P_0^2) + \cdots + (P_{p-1}^0 P_0^0 P_0^2). \tag{3}$$

Durch Addition des Randes

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^2 P_0^3)^{\cdot} = (P_1^0 P_0^2 P_0^3) - (P_0^0 P_0^2 P_0^3) + (P_0^0 P_1^0 P_0^3) - (P_0^0 P_1^0 P_0^2)$$

und durch die entsprechenden Veränderungen für die anderen $(P_j^0 P_{j+1}^0 P_0^2)$ geht die Kette $\mathfrak{k}$ in

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^3) + (P_1^0 P_2^0 P_0^3) + \cdots + (P_{p-1}^0 P_0^0 P_0^3) \tag{4}$$

über. Die Kanten $(P_0^0 P_1^0)$ usw. liegen immer noch auf dem Rand von a_0^3. Um dies abzuändern, addieren wir den Rand

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^3 P_0^4)^{\cdot}.$$

Das Tetraeder $(P_0^0 P_1^0 P_0^3 P_0^4)$ kommt wirklich in der Simplizialzerlegung vor, da die Zelle a_0^4 von allen Dreizellen berandet wird. Es wird dann aus dem ersten Glied von (4)

$$(P_1^0 P_0^3 P_0^4) - (P_0^0 P_0^3 P_0^4) + (P_0^0 P_1^0 P_0^4).$$

Um nun den letzten Summanden wegzuschaffen, versuchen wir, durch entsprechende Veränderung an den andern Gliedern von (4) die Summe

$$(P_0^0 P_1^0 P_0^4) + g(P_0^0 P_1^0 P_0^4) + \cdots + g^{p-1}(P_0^0 P_1^0 P_0^4) \tag{5}$$

zu erhalten. Sie geht offenbar ja bei dem Homomorphismus φ in Null über. Es ist offenbar

$$g(P_0^0 P_1^0 P_0^4) = (P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_{q_2^{-1}}^4).$$

Man hat also einfach nur zum Glied $(P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_{q_2^{-1}}^3)$ von (4) den Rand $(P_{q_0^{-1}}^0 P_{q_0^{-1}+1}^0 P_0^3 P_{q_2^{-1}}^4)^{\cdot}$ zu addieren. Das entsprechende Tetraeder kommt ja in der Simplizialzerlegung vor, da jede Zelle a_j^4 von allen Zellen a_i^3 berandet wird.

Durch die entsprechenden Operationen für die anderen Glieder von (4) erhält man so, wenn man noch (5) streicht, die Kette

$$\begin{aligned}&(P_1^0 P_0^3 P_0^4) + (P_2^0 P_0^3 P_{k_1}^4) + \cdots + (P_0^0 P_0^3 P_{k_{p-1}}^4)\\ &- (P_0^0 P_0^3 P_0^4) - (P_1^0 P_0^3 P_{k_1}^4) - \cdots - (P_{p-1}^0 P_0^3 P_{k_{p-1}}^4),\end{aligned} \tag{6}$$

wobei sich die Indizes k_i bestimmen aus

$$k_i \equiv \lambda_i q_2^{-1} \pmod p \quad \text{mit} \quad \lambda_i q_0^{-1} \equiv i \pmod p,$$

also

$$k_i \equiv i \,.\, q_0 q_2^{-1} = i \,.\, k \pmod p.$$

Um nun auch noch die Punkte P_j^0 aus den einzelnen Summanden zu entfernen, wird man versuchen, $(P_1^0 P_0^3 P_0^4)$ sukzessive in $-(P_1^0 P_0^3 P_k^4)$ überzuführen. Dabei muß man beachten, daß die Zelle a_0^4 sowohl a_{p-1}^5 als auch a_0^5 berandet, a_1^4 sowohl a_0^5 als a_1^5, …, a_k^4 sowohl a_{k-1}^5 als auch a_k^5. Man addiert also den Rand

$$(P_1^0 P_0^3 P_0^4 P_0^5)\cdot = (P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^4 P_0^5) + (P_1^0 P_0^3 P_0^5) - (P_1^0 P_0^3 P_0^4)$$

und weiter

$$-(P_1^0 P_0^3 P_1^4 P_0^5)\cdot = -(P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_1^0 P_1^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^3 P_0^5) + (P_1^0 P_0^3 P_1^4),$$

darauf $(P_1^0 P_0^3 P_1^4 P_1^5)\cdot$ usf. bis $-(P_1^0 P_0^3 P_k^4 P_{k-1}^5)\cdot$. Entsprechend verfährt man mit den übrigen Gliedern von (6), indem man $(P_2^0 P_0^3 P_k^4)$ in $-(P_2^0 P_0^3 P_{2k}^4)$ überführt usf. Auf diese Weise bleibt die Kette

$$\begin{aligned}
&(P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_1^0 P_0^4 P_0^5) - (P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_1^0 P_1^4 P_0^5) + \cdots - (P_0^3 P_k^4 P_{k-1}^5) + (P_1^0 P_k^4 P_{k-1}^5)\\
&+(P_0^3 P_k^4 P_k^5) - (P_2^0 P_k^4 P_k^5) - (P_0^3 P_{k+1}^4 P_k^5) + (P_2^0 P_{k+1}^4 P_k^5) + \cdots - (P_0^3 P_{2k}^4 P_{2k-1}^5) + (P_2^0 P_{2k}^4 P_{2k-1}^5)\\
&\qquad\vdots\\
(8)\qquad &\qquad\vdots\\
&\qquad\vdots\\
&+(P_0^3 P_{(p-1)k}^4 P_{(p-1)k}^5) - (P_{p-1}^0 P_{(p-1)k}^4 P_{(p-1)k}^5) - (P_0^3 P_{\substack{(p-1)k\\+1}}^4 P_{(p-1)k}^5)\\
&\qquad + (P_{p-1}^0 P_{\substack{(p-1)k\\+k}}^4 P_{(p-1)k}^5) + \cdots - (P_0^3 P_0^4 P_{p-1}^5) + (P_{p-1}^0 P_0^4 P_{p-1}^5)
\end{aligned}$$

übrig. Hierin kann man aber nun die 2., 4., …, $4k$-te Spalte streichen, da sie von der Form $(1+g+g^2+\cdots+g^{p-1})\,.\,a$ sind. Die restlichen $p\,.\,2k$ Glieder ergeben k mal die Kette

$$(9)\qquad (P_0^3 P_0^4 P_0^5) - (P_0^3 P_1^4 P_0^5) + (P_0^3 P_1^4 P_1^5) \mp \cdots + (P_0^3 P_{p-1}^4 P_{p-1}^5) - (P_0^3 P_0^4 P_{p-1}^5).$$

Diese Kette hat aber nur den Punkt P_0^3 mit a_0^3 gemeinsam und P_0^3 gehört nicht zum Rand von (9). Weiter haben die Bilder von (9) bei den Transformationen $g, g^2, \ldots, g^{p-1}$ keinen Punkt mit a_0^3 gemeinsam. Daher ist die τ-Schnittzahl von a_0^3 und (8) (je nach der Orientierung der Mannigfaltigkeit) gleich

$$\pm k = \pm q_0 q_2^{-1}.$$

Damit ist die Eigenverschlingungszahl der Homologieklasse von $\varphi(a_0^2)$ kongruent

$$\pm \frac{q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta^{q_1}} \bmod 1.$$

Geht man zu einer anderen Erzeugenden $\mu\,\varphi(a_0^2)$ über, wobei μ eine ganze Zahl aus $K = P(\zeta)$ und teilerfremd zu $(1-\zeta)$ ist, so wird die Verschlingungszahl

$$\pm \frac{\mu\,\bar{\mu}\,q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta^{q_1}},$$

Zwei Linsenräume $L(p, q_0, q_1, q_2)$ und $L(p, q_0', q_1', q_2')$ können also höchstens dann topologisch äquivalent sein, wenn mit einer geeigneten ganzen, zu $(1-\zeta)$ teilerfremden Zahl μ aus K die Kongruenz

$$\frac{q_0' q_2'^{-1}}{1-\zeta^{q_1'}} \equiv \pm \frac{\mu \bar{\mu} q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta^{q_1}} \mod 1 \tag{10}$$

besteht. Man kann sie noch umformen, indem man schreibt

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1'}} \cdot \frac{q_0' q_2'^{-1}}{1-\zeta} \equiv \pm \frac{\mu \bar{\mu} q_0 q_2^{-1}}{1-\zeta} \cdot \frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1}} \mod 1$$

oder auch

$$\frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1'}} \cdot q_0' q_2'^{-1} \equiv \pm \mu \bar{\mu} q_0 q_2^{-1} \cdot \frac{1-\zeta}{1-\zeta^{q_1}} \mod (1-\zeta).$$

Da $(1-\zeta^{q_1'})/(1-\zeta^{q_1})$ eine Einheit ist, ist diese Kongruenz gleichwertig mit

$$q_0' q_2'^{-1} \equiv \pm \varepsilon \mu \bar{\mu} q_0 q_2^{-1} \mod (1-\zeta),$$

wobei ε die Einheit $\varepsilon = (1-\zeta^{q_1'})/(1-\zeta^{q_1})$ ist. Ersetzt man noch μ durch $q_2 q_2'^{-1} \mu$, so erhält man die Kongruenz

$$q_0' q_2' \equiv \pm \varepsilon \mu \bar{\mu} q_0 q_2 \mod (1-\zeta). \tag{11}$$

Entsprechende Kongruenzen erhält man, wenn man als homomorphe Abbildung φ den Übergang $g \to \zeta^q$ $(q, p) = 1$ wählt. Dabei ist nur ε durch seine Konjugierte $\varepsilon^{(q)}$ zu ersetzen.

(Eingegangen am 20. August 1948.)

Literaturverzeichnis.

Alexandroff-Hopf.

Topologie I, Berlin 1935, Anhang I, § 5. 64.

Franz, W.

[1] Elementarteilertheorie in algebraischen Zahlkörpern, Crelle 171 (1934), S. 149.

[2] Überdeckungen topologischer Komplexe mit hyperkomplexen Systemen, Crelle 173 (1935), S. 164.

Krull, W.

[1] Matrizen, Moduln und verallgemeinerte Abelsche Gruppen im Bereich der ganzen algebraischen Zahlen. S.B. Heidelberg Akad. Wiss. Math.-nat. Klasse 1932, Abh. 2, S. 13.

Pontrjagin.

[1] Über den algebraischen Inhalt topologischer Dualitätssätze, Math. Ann. 105 (1931), S. 165.

Reidemeister, K.

[1] Homotopiegruppen von Komplexen, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 10 (1934), S. 211.

[2] Überdeckungen von Komplexen, Crelle 173 (1935), S. 164.

[3] Homotopieringe und Linsenräume, Abh. Math. Sem. Hamburg. Univ. 11 (1936), S. 102.

[4] Durchschnitt und Schnitt von Homotopieketten, Mh. Math. Phys. 48 (1939), S. 226.

de Rham, G.

[1] Thèses, Paris 1931.

Seifert, H.

[1] Verschlingungsinvarianten, S.B. Preuß. Akad. Wiss. 16 (1933), S. 811.

Seifert-Threlfall.

[1] Lehrbuch der Topologie, Leipzig/Berlin 1934, § 69 ff.

Steinitz, E.

[1] Rechteckige Systeme und Moduln in algebraischen Zahlkörpern, Teil I, Math. Ann. 71 (1912), S. 328.

[2] Desgl., Teil II, Math. Ann. 72 (1912), S. 297.

Konforme Abbildung

Von

Dipl.-Ing. Dr. phil. **Albert Betz**

Direktor des Max Planck-Instituts für Strömungsforschung und Professor an der Universität Göttingen

Mit 276 Bildern

VIII, 359 Seiten. 1949. DMark 36.—

Inhaltsübersicht:

I. Einführung und einfache Beispiele. — II. Elektrische Stromfelder. — III. Weitere Beispiele und Folgerungen. — IV. Allgemeine Erkenntnisse. — V. Auftreten der konformen Abbildung in anderen Gebieten der Physik. — VI. Zusammenhang der konformen Abbildung mit der Theorie der komplexen Funktionen. — VII. Abbildung durch einfache Funktionen. — VIII. Einige zusammengesetzte Funktionen. — IX. Behandlung gegebener Abbildungsaufgaben. — X. Doppelperiodische Felder. — XI. Freie Strahlen. — Übersicht über die wichtigsten behandelten Abbildungen. — Namen- und Sachverzeichnis.

Aus dem Vorwort:

Das vorliegende Buch will vor allem den vielen Ingenieuren und Naturwissenschaftlern, welche dieses wichtige mathematische Hilfsmittel für ihre praktischen Aufgaben brauchen, die Grundlagen der konformen Abbildung in einer ihrer Ausbildung angepaßten Form vermitteln. Aus diesem Grunde werden Vorkenntnisse aus der mathematischen Funktionentheorie nicht vorausgesetzt, sondern umgekehrt, die Leser an Hand von anschaulichen Beispielen in diese mathematische Disziplin eingeführt, die dann erst später für weitere Aufgaben Verwendung findet. Wenn das Buch demnach nicht eigentlich für Mathematiker geschrieben ist, so dürfte es aber doch auch für diese als Gesamtdarstellung dieses Sondergebietes von Interesse sein und vielleicht gerade wegen der Eigenart der stark auf der geometrischen Anschauung beruhenden Darstellung manche Anregung finden.

Determinanten und Matrizen

Von

Dr. **Fritz Neiss**

Professor an der Universität Berlin

Mit einer Abbildung

VII, 111 Seiten. 1948. DMark 6.—

Inhaltsübersicht:

I. Allgemeine Vorbemerkungen. — II. Kombinatorik. — III. Determinanten. — IV. Matrizen. — V. Systeme linearer Gleichungen. — VI. Orthogonalisierung. — VII. Quadratische Formen. — Sachverzeichnis.

Das Buch enthält die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Determinanten, das Rechnen mit Matrizen und die Behandlung linearer Gleichungen.

Das Buch wird dem Studierenden den Übergang von der Schule zur Hochschule erleichtern und kann neben der Vorlesung oder zum Selbststudium gebraucht werden. Besondere Vorkenntnisse werden nicht vorausgesetzt. Gedankengänge, die dem Anfänger neu sind, werden ausführlich erläutert. Dagegen geben zahlreiche Beispiele und Aufgaben Gelegenheit zu selbständiger Arbeit. Die Anwendungen zeigen die Bedeutung der allgemeinen Theorie für die analytische und projektive Geometrie, besonderer Wert ist darauf gelegt, die Grundlagen für das Rechnen mit Vektoren zu schaffen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen

Von

Dr. **Konrad Knopp**

ord. Professor der Mathematik an der Universität Tübingen

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band II)

Vierte Auflage

Mit 14 Textfiguren

XII, 583 Seiten. 1947. DMark 39.60

Das Buch bietet dem Studierenden eine zuverlässige und gründliche Hilfe und ist gleichzeitig zur Durcharbeitung des ganzen Stoffes im Selbststudium geeignet. Dieser Stoff umfaßt alle Betrachtungen und Untersuchungen der höheren Analysis, bei denen die unendlichen Reihen im Vordergrund des Interesses stehen. Die Darstellung ist lebendig und leicht faßlich, selbstverständlich ohne den geringsten Verzicht auf Exaktheit.

Die Hauptgrundlage der höheren Analysis, die Theorie der reellen Zahlen, ist so ausführlich und didaktisch geschickt dargestellt, daß das Buch über seinen besonderen Zweck hinaus allgemein als Einführung in die moderne Behandlung der höheren Analysis überhaupt angesehen wird und gerade als solche weiteste Verbreitung gefunden hat.

Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik

Von

Dr. **Wilhelm Magnus** und Dr. **Fritz Oberhettinger**

Professor der Mathematik an der Universität Göttingen — Dozent für Mathematik an der Universität Mainz

(Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Band LII)

Zweite Auflage

VIII, 230 Seiten. 1948. DMark 24.60

Die zunehmende Verwendung mathematischer Hilfsmittel in der physikalischen und technischen Literatur macht ein ständiges Nachschlagen in umfangreichen, mitunter schwer zugänglichen Werken der mathematischen Fachliteratur und in zahlreichen Einzelarbeiten notwendig. Dabei gibt es aber eine sehr große Zahl von Resultaten, insbesondere von Formeln, die sich auf geringem Raum wiedergeben lassen und einen großen Teil dessen ausmachen, was immer wieder gebraucht wird und immer wieder mit Mühe zusammengesucht werden muß. Die vorliegende Übersicht über die Eigenschaften einer Reihe von speziellen Funktionen wird hier von Nutzen sein.

Die zweite Auflage unterscheidet sich von der ersten durch kleinere und größere Zusätze. Das Kapitel über elliptische Funktionen wurde völlig neu geschrieben; sein Umfang hat sich verdoppelt. Größere Zusätze finden sich bei der allgemeinen und der konfluenten hypergeometrischen Funktion, den Zylinderfunktionen und der Gammafunktion. Als Anhang wurde ein Abschnitt über elementare Funktionen angefügt, der einige Fourierreihen und solche Formeln enthält, die bei der Untersuchung der im Hauptteil des Buches behandelten Funktionen von Bedeutung sind. Ferner wurden bei den Integraldarstellungen mehrfach auch Kontur-Integrale mit herangezogen.

SPRINGER-VERLAG / BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Veröffentlicht unter Zulassung Nr. 100 der Britischen Militärregierung.
Springer-Verlag / Berlin · Göttingen · Heidelberg.
Druck: Dieterichsche Universitäts-Buchdruckerei W. Fr. Kaestner, Göttingen. — Printed in Germany.